机密★启用前

江苏大学 2008 年硕士研究生入学考试试题

科目代码： **605** **科目名称：** 线性代数

考生注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷、草稿纸上无效！

一、计算下列各题（7*2=14 分）

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$

2. 已知A为n阶方阵，且$(A-E)^2=2(A+E)^2$，求A^{-1}。

二、（15 分）当λ为何值时，方程组$\begin{cases}(\lambda+3)x_1+x_2+2x_3=\lambda \\ \lambda x_1+(\lambda-1)x_2+x_3=2\lambda \\ 3(\lambda+1)x_1+\lambda x_2+(\lambda+3)x_3=3\end{cases}$有解，并在有解时求解。

三、（15 分）已知向量组$\alpha_1=\begin{bmatrix}3\\1\\2\\1\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}-6\\4\\-1\\-5\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}-7\\-1\\-3\\-4\end{bmatrix}$ $\alpha_4=\begin{bmatrix}3\\2\\1\\2\end{bmatrix}$，求向量组的秩和一个最大无关组，并把其余的向量用这个最大无关组线性表示。

四、（15 分）求一个正交变换$X=PY$化下列二次型为标准形，并写出二次型的标准形。$f(x_1,\ x_2,\ x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$

五、（15 分）设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是一组$n$维向量，证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关的充分必要条件是任一$n$维向量都可被它们线性表出。

六、（14 分）设$\beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_r$，$\beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_r,\cdots$，$\beta_r=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{r-1}$，证明：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$有相同的秩。

七、（12 分）设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是一组$n$维向量，已知单位向量$\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots,\varepsilon_n$可被它们线性表出，证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关。

八、（10分）设η_0是非齐次线性方程组$AX=b$的一个解，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$是它的导出组$AX=0$的一个基础解系，令

$\gamma_1=\eta_0,\gamma_2=\eta_1+\eta_0,\cdots,\gamma_{t+1}=\eta_t+\eta_0$，证明：线性方程组的任一解$\gamma$都可表示成 $\gamma=u_1\gamma_1+u_2\gamma_2+\cdots+u_{t+1}\gamma_{t+1}$，其中$u_1+u_2+\cdots+u_{t+1}=1$。

九、（10分）设A为n阶矩阵，证明：

（1）A是反对称矩阵当且仅当对任一个n维向量X，有$X'AX=0$；

（2）如果A为对称矩阵，且对任一个n维向量X有$X'AX=0$，那么$A=0$。

十、（10 分）矩阵A称为反对称的，如果$A'=-A$。证明：任一$n\times n$矩阵都可表示为一对称矩阵与一反对称矩阵之和。

十一、（10分）如果A,B均为n阶正定矩阵，证明：$A+B$也是正定矩阵。

十二、（10分）设A,B为n阶方阵，$E-AB$可逆，证明$E-BA$也可逆。