机密★启用前

江苏大学2009年硕士研究生入学考试试题

科目代码：853 　　**科目名称：** 高等代数

考生注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷、草稿纸上无效！

一（20分）设 $A=\begin{bmatrix}0 & 3 & 3\\ -1 & 8 & 6\\ 2 & -14 & -10\end{bmatrix}$

求：1）A的不变因子、行列式因子、初等因子；

2）A的Jordan标准形.

二（20分）设线性方程组 $\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=4\\ x_1+bx_2+x_3=3\\ x_1+2bx_2+x_3=4\end{cases}$

试讨论：当a, b分别取什么值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？并在有无穷多解时求其一般解.

三（18分）设A是 $n\times n$ 矩阵（$n\ge 2$），A^* 是 A 的伴随矩阵.

试证明：当 $R(A)=n$ 时，$R(A^*)=n$；而当 $R(A)\le n-1$ 时，$R(A^*)=0$ 或1 .

四（20分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$ 是 n 维欧氏空间 V 中的一组向量，

记 $A=\begin{bmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \dots & (\alpha_1,\alpha_m)\\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \dots & (\alpha_2,\alpha_m)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ (\alpha_m,\alpha_1) & (\alpha_m,\alpha_2) & \dots & (\alpha_m,\alpha_m)\end{bmatrix}$ 　　其中 (α_i,α_j) 为内积.

证明：$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow |A|\neq 0$.

五（20 分）设 $A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ 是一对称矩阵，且 $|A_{11}|\neq 0$.

证明：存在 $B=\begin{bmatrix} E & X \\ O & E \end{bmatrix}$，使得 $B^T AB=\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & * \end{bmatrix}$，

其中*表示一个阶数与 A_{22} 相同的矩阵.

六（20 分）设/A 是线性空间 V 上的一个线性变换，若/A 可逆，且 λ 是/A 的一个特征值，

则 $\dfrac{1}{\lambda}$ 是 /A^{-1} 的特征值.

七（18 分）设 $S(A)=\{B\in P^{n\times n} \mid AB=0, A\in P^{n\times n}\}$

(1) 证明：$S(A)$ 是 $P^{n\times n}$ 的一个子空间；

(2) 若 $R(A)=r$，问 $\dim S(A)=?$

八（14 分）设 σ,τ 是复数域 C 上的 n 维线性空间 V 的两个非零线性变换.

$\sigma(\sigma\tau-\tau\sigma)=(\sigma\tau-\tau\sigma)\sigma$，　$\tau(\sigma\tau-\tau\sigma)=(\sigma\tau-\tau\sigma)\tau$，且 $\dim\mathrm{Im}(\sigma\tau-\tau\sigma)=1$.

试证：σ 与 τ 有公共非平凡不变子空间.