机密★启用前

江苏大学 2009 年硕士研究生入学考试试

科目代码： 360　　　　　　科目名称：　数学分析

考生注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷、草稿纸上无效!

1 填空题（30 分）:

（1）极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{\sin^3 x}=$________；极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\sqrt{n^2+n\pi}\right)=$________。

（2）函数 $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$ 的间断点是________，该间断点的类型是________________。

（3）已知函数 $f(x)$ 可导，且 $y=\dfrac{f(x^2)}{x}$，则 $y'=$________________________；若取 $f(x)=xe^{\sqrt{x}}$。则 $y^{(21)}(0)=$　　　　___。

（4）改变积分 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$ 的积分次序为________________________。其极坐标形式为__________________________。

（5）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的和函数是________________，其收敛区间为______________。

2 叙述 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq a$ 的 $\varepsilon-N$ 描述，证明数列 $\left\{n^{(-1)^n}\right\}$ 发散。（6 分）

3 证明数列 $\left\{x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 收敛，若及其极限为 e，进一步证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$。（8 分）

4 设函数 $f(x)$ 定义在 $(a,+\infty)$ 上，$f(x)$ 在每一个有限区间 (a,b) 内有界并满足 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+1)-f(x)]=A$。试证明：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=A$.（10 分）

5.设函数 $f(x)$ 在区间 I 只有可去间断点，令 $g(x)=\lim\limits_{y\to x}f(y)$，证明 $g(x)$ 为连续函数。（6分）

6..已知 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内具有单调的导数，证明 $f(x)$ 的导函数在区间 (a,b) 内连续。（6 分）

7..设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上二阶可导且 $f'(a)=f'(b)=0$，试证明：存在点 $\xi\in(a,b)$，使得 $|f''(\xi)|\geq\dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$。（8 分）

8..证明;闭区间 $[a,b]$ 的全体聚点的集合是 $[a,b]$ 本身（8 分）

9..设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为定义在 $[a,b]$ 上的有界函数，若已知仅在 $[a,b]$ 上有限个点处成立 $f(x)\neq g(x)$，则当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积时，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积，且 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$。（8 分）

10.设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=A$。（8 分）

11.已知曲线 $r=a(1+\cos\theta)$，其中 $a>0$，试求：（1）该曲线的弧长；（2）曲线所围图形的面积；（3）曲线绕极轴旋转所成立体的曲面面积（12 分）。

12.已知级数 $\sum a_n$ 收敛，且级数 $\sum(b_{n+1}-b_n)$ 绝对收敛，证明级数 $\sum a_n b_n$ 收敛。（8 分）

13.设函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上连续，证明：（1）$\{x^n f(x)\}$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上收敛；（2）$\{x^n f(x)\}$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上一致收敛的充要条件是什么？证明之。（8 分）

14.已知 $f(x)$ 为区间 $[-\pi,\pi]$ 上可积函数，且其 Fuier 级数在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$，证明成立 Parseval 等式：$\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx=\dfrac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$。（8 分）

15..已知一元函数 $\varphi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，令

$f(x,y)=\varphi(x)$，$(x,y)\in[a,b]\times(-\infty,+\infty)$，试证明（1）$f(x,y)$ 是否连续？(2) $f(x,y)$ 是否一致连续？（8 分）

16.设 f_x, f_y 和 f_{yx} 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内存在，且 f_{yx} 在点 (x_0,y_0) 处连续，试证明：$f_{xy}(x_0,y_0)$ 存在且 $f_{xy}(x_0,y_o)=f_{yx}(x_0,y_0)$。（8 分