机密★启用前

江苏大学 2009 年硕士研究生入学考试试题

科目代码： 361　　**科目名称：** 线性代数

考生注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷、草稿纸上无效！

一、填空与选择题题（3*10=30 分）

1．设 A,B 为 n 阶方阵，满足等式 $AB=0$，则必有（　　）

A. $A=0$ 或 $B=0$　　B. $A+B=0$

C. $|A|=0$ 或 $|B|=0$　　D. $|A|+|B|=0$

2．设 $V=\{X=(x_1,\ x_2,\ x_3)\mid x_1+3x_2+5x_3=0\}$，且 $x_1,x_2,x_3\in R$，则（　　）

A. V 是 1 维向量空间　　B. V 是 2 维向量空间

C. V 是 3 维向量空间　　D. V 不是向量空间

3. 设 $A,\ B$ 均为 n 阶可逆矩阵，则 $(AB)^2$ 的逆等于（　）

A. $(A^2)^{-1}(B^2)^{-1}$　　B. $(B^2)^{-1}(A^2)^{-1}$

C. $B^{-1}A^{-1}B^{-1}A^{-1}$　　D. $A^{-1}B^{-1}A^{-1}B^{-1}$

4. 当 $P=$（　　）时，$P\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}-3a_{31} & a_{12}-3a_{32} & a_{13}-3a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

5．A 是方阵，齐次线性方程组 $AX=0$ 是线性方程组 $AX=b$ 的导出组，则下列说法不正确的是（　）

A. $AX=0$ 只有零解时，$AX=b$ 有唯一解

B. $AX=0$ 有非零解时，$AX=b$ 有无穷多个解

C. $AX=b$ 有唯一解时，$AX=0$ 只有零解

D. $AX=b$ 有无穷多个解时，$AX=0$ 有非零解

6．已知 3 阶矩阵 A 的 3 个特征值为 2，－1，3，则 A^2 的特征值为__________。

7．若 α_1，α_2 线性无关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则向量组 $2\alpha_1$，$3\alpha_2$，$5\alpha_3$ 的秩为____。

8．n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 存在非零解的充要条件是____________________。

9．若 A 为 3 阶方阵，且 $|A|=3$，则 A 的伴随阵 A^* 的行列式 $|A^*|=$________。

10．与 $\alpha_1=(1,\ 2,\ -1)$，$\alpha_2=(4,\ 0,\ 2)$ 都正交的单位向量 $\beta=$__________。

二、（15 分）计算题：1.（7 分）$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$　2.（8 分）$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$

三、（15 分）求齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$ 的一个基础解系，并求出通解。

四、（15 分）当 λ 为何值时，方程组$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$ 有唯一解，无解，有无穷多解，并在有无穷多解时求出所有的解。

五、（15 分）求解矩阵方程 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

六、（10 分）t 取何值时，二次型 $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 是正定的。

七、（15 分）求一个正交矩阵 P，化矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ 为对角阵。

八、（15 分）在 P^4 中，求向量 ξ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的坐标

其中：$\varepsilon_1 = (1,1,1,1), \varepsilon_2 = (1,1,-1,-1), \varepsilon_3 = (1,-1,1,-1), \varepsilon_4 = (1,-1,-1,1)$，$\xi = (1,2,1,1)$

九、（10 分）在 P^4 中，求由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 的过渡矩阵，其中

$\varepsilon_1 = (1,0,0,0), \varepsilon_2 = (0,1,0,0), \varepsilon_3 = (0,0,1,0), \varepsilon_4 = (0,0,0,1)$，

$\eta_1 = (2,1,-1,1), \eta_2 = (0,3,1,0), \eta_3 = (5,3,2,1), \eta_4 = (6,6,1,3)$

十、（10 分）设 A, B 为 $n \times n$ 矩阵，证明：如果 $AB = 0$，那么 秩(A) + 秩$(B) \le n$