机密★启用前

江苏大学2010年硕士研究生入学考试试题A卷

考试科目：高等代数 853

考生注意：答案必须写在答题纸上，写在试题及草稿纸上无效

一（20分）设 $A=\begin{bmatrix}-3 & 3 & -2\\ 0 & -1 & 0\\ 8 & 6 & 5\end{bmatrix}$，

求：1）A 的不变因子，行列式因子和初等因子；

2）A 的 Jordan 标准形。

二（18分）设 V 是全体实 2×2 矩阵所构成的实线性空间，$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in V$，定义 V 的变换：$T\,X=AX$，　$\forall X\in V$

1）证明：T 是线性的；

2）当 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & -4\end{bmatrix}$ 时，求 T 的值域 $\mathrm{Im}(T)$ 及它的一组基。

三（20分）设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t;\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 的秩分别为 r_1,r_2,r_3，证明：$\max(r_1,r_2)\le r_3\le r_1+r_2$

四（18分）设 A,B,C,D 都是 $n\times n$ 矩阵，且 $|A|\ne0, AC=CA$，证明：

$$\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}=|AD-CB|$$

五（20分）证明：二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 半正定 $\Leftrightarrow$ 其正惯性指数与秩相等。

六（18分）叙述并证明哈密顿-凯莱（Hamilton-Caylay）定理。

七（18分）证明：第二类正交变换一定以-1作为它的一个特征值。

八（18分）

1）设V为数域F上n维线性空间，证明：V有无穷多个r（$1\le r<n$）维子空间。

2）V是数域P上n维线性空间,V_1,V_2是V的两个子空间，

若$\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1\cap V_2)+1$，则$V_1\cup V_2$是$V$的子空间。