机密★考试结束前

江苏大学2010年硕士研究生入学考试试题

科目代码： 360　　　　**科目名称：** 数学分析

考生注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷、草稿纸上无效！

一、填空（共5小题，每题4分，共20分）

1. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n=$ ________________。

2.. 设$f(x)$为二阶可导函数, 则$y=f(f(x))$的二阶导数是________________。

3. 在(a,b)上的连续函数$f(x)$为一致连续的充要条件是________________。

4.若对任意小的$\varepsilon>0$，$f(x)$在$[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$上连续，由此推出$f(x)$在$(a,b)$内连续，该结论________。

5. 积分$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx\,(b>a>0)$的值是________。

二、设$f(x),g(x)$为D上有界函数，证明：

$$\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\le\inf_{x\in D}f(x)+\sup_{x\in D}g(x)\le\sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}$$ （10分）

三、证明：$\left|e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right|<\frac{3}{n}$。（10分）

四、证明对任意$x_0\in[0,1]$，成立$\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$，其中$R(x)$为黎曼函数。（10分）

五、证明函数$f(x)=\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上一致连续。（10分）

六、设函数$f(x)$在区间I上连续，证明：1）若对任意有理数$r\in I$，有$f(r)=0$，则在I上，$f(x)\equiv0$；

2）若对任意两个有理数r_1,r_2，$r_1<r_2$，有$f(r_1)<f(r_2)$，则$f(x)$在I上严格单调递增。（12分）

七、已知$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上可积，证明：

$M(x)=\max\{f(x),g(x)\}$，$m(x)=\min\{f(x),g(x)\}$也在$[a,b]$上可积。（8分）

八、设$f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上连续周期函数，周期为p，证明：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{p}\int_0^p f(t)dt$$ （10分）

九、设曲线由极坐标$r=r(\theta)$给出，且二阶可导。求曲线在(r,θ)出的曲率。（10分）

十、设$\{u_n(x)\}$为$[a,b]$上正的递减且收敛于零的函数列，每一个$u_n(x)$都是$[a,b]$上的单调函数，证明：级数$\sum(-1)^{n-1}u_n(x)$在$[a,b]$上收敛且一致收敛。（10分）

十一、设$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$，$x>0$，计算$\int_{\ln2}^{\ln3}S(x)dx$。（10分）

十二、若三角级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$中的系数$a_n$，$b_n$满足关系式

$\sup_n\{|n^3a_n|,|n^3b_n|\}\le M$，这里$M$是常数。证明所给三角级数收敛且其和函数具有连续导数。(12分)

十三、确定正数λ，使曲面$xyz=\lambda$与椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$在某一点相切。(10分)

十四、证明：若二元函数$f(x,y)$在点$P(x_0,y_0)$的某邻域$U(P)$内的偏导数f_x和f_y有界，则$f(x,y)$在$U(P)$内连续。(8分)