江苏大学

2011年硕士研究生入学考试初试试题（ A卷 ）

科目代码：601　科目名称：数学分析　满分：150　分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

1、填空（每题4分，共20分）

1）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin\dfrac{\pi}{n}=$ ________ ；

2）设函数 $f(x)$ 在 x 处二阶可导，且 $f'(x)\neq 0$，则由 $f'(x),f''(x),f'''(x)$ 表示的 $\left(f^{-1}\right)^{(3)}(x)$= ________

3）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$ 的收敛区间是________，和函数 $S(x)=$ ________。

4）曲线：$x=a\sin^2 t$，$y=b\sin t\cos t$，$z=c\cos^2 t$ 在点 $\left(\dfrac{a}{2}\dfrac{b}{2},\dfrac{c}{2}\right)$ 处的切线________，

法平面方程________。

5）函数 $u=x^2+2y^2+3z^2+xy-4x+2y-4z$ 在点 $O(0,0,0)$ 处的梯度是________其模为________。

2、设 $\{a_n\}$ 是有界数列，分别记 $\overline{a_n}=\sup\{a_n,a_{n+1},\cdots\}$，$\underline{a_n}=\inf\{a_n,a_{n+1},\cdots\}$，并记 $\overline{a}=\lim\overline{a_n}$，$\underline{a}=\lim\underline{a_n}$，证明：$\{a_n\}$ 收敛的充要条件是 $\overline{a}=\underline{a}$。（8分）

3、设 $R(x)$ 表示 $[0,1]$ 上黎曼函数，证明:对任意 $x_0\in(0,1)$，成立 $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$。（8分）

4、已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $f(1)=(0)$，证明：对任意正整数 n，存在 $\xi\in[0,1]$，使得

$$f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)=f(\xi)。（10分）$$

5、设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在。证明：$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续。（10分）

6、证明：方程 $x^n+px=q=0$ 当 n 为偶数时至多有两个实根，当 n 为奇数时至多有三个实跟，其中 n 为正整数，p,q 为实数。（8分）

7、证明;若 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的二阶连续可导的有界函数，则存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f''(\xi)=0$。

(8 分)

8、设T'是T增加若干分点后所成的分割，证明$\sum_{T'}\omega_i'\Delta x_i' \le \sum_{T}\omega_i\Delta x_i$。（8 分）

9、若$f(x)$在$[a,b]$上可积，则$f(x)$在$[a,b]$内必有稠密的连续点。（10 分）

10、 若$f(x)$为区间$[0,1]$上的单调函数，且$\int_0^1 x^a f(x)dx$存在（这里a是非负实数），证明：

$$\lim_{x\to 0} x^{a+1} f(x) = 0$$。（8 分）

11、 若$f(x)$为区间$[0,1]$上的单调函数，且$\int_0^1 x^a f(x)dx$存在（这里a是非负实数），证明：

$$\lim_{x\to 0} x^{a+1} f(x) = 0$$。（8 分）

12、 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$的敛散性。（10 分）

13、 证明函数$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$在$(1.+\infty)$内连续，且有连续的各阶导数。（10 分）

14、 证明：若$\int_0^{+\infty} f(x,t)dt$在$x\ge 0$时一致收敛于$F(x)$，$\lim_{x\to+\infty} f(x,t)=\varphi(t)$对任意$t\in[a,b]\subset(0,+\infty)$一致成立，则有$\lim_{x\to+\infty} F(x)=\int_0^{+\infty}\varphi(t)dt$。（12 分）

15、 已知$f(P)$在有界开集E上一致连续，证明：$f(P)$在E上有界且可以将其连续延拓∂E。(12 分)