

江苏工业学院

2010年攻读硕士学位研究生入学考试（初试）试卷

考试科目：360 理学数学（本科目总分150分，考试时间3小时）
请考生注意：试题解答请务必写在专用“答题纸”上；其它地方的解答将视为无效答题，不予评分。

一、简答题：（共15题，共计100分）

- （本题满分6分）求解微分方程初值问题
$$\begin{cases} y' + 2xy = 3x \\ y(0) = 1 \end{cases}。$$
- （本题满分6分）求曲线 $e^y + 6xy + x^2 - e = 0$ 在 $(0, 1)$ 处的切线与 x 轴交点的坐标。
- （本题满分6分）分别举出一个函数 $f(x)$ ，使得
 - $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界，且 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界；
 - $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界，但 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内无界。
- （本题满分6分）证明方程 $x^3 + 5x - 2 = 0$ 只有一个正根。
- （本题满分6分）判别曲线 $y = e^{\arctan x}$ 的凹凸性。
- （本题满分7分）求函数 $f(x) = x \cdot (x-1)^{\frac{1}{3}}$ 在区间 $[-1, 2]$ 上的最大和最小值。
- （本题满分7分）已知直线 L 过点 $(1, 1, 1)$ 且和直线
$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$
 垂直相交，求直线 L 的方程。
- （本题满分7分）求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1-2x^2)}}$ 。

9. (本题满分 7 分) 函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = e^t - t \\ y = \ln(1+t) \end{cases}$ 决定, 求参数 t

的范围, 使得函数 $y = y(x)$ 在该范围内单调递增。

10. (本题满分 7 分) 求 $\iint_D x^2 dx dy$, D 为 $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$ 在上半平面部分。

11. (本题满分 7 分) 求 $y'' + 3y' + 2y = e^{2x}$ 的通解。

12. (本题满分 7 分) 求不定积分 $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx$ 。

13. (本题满分 7 分) 设 $f(u, v)$ 的各二阶偏导数连续, $z = f\left(\frac{x}{y}, x + y\right)$,

求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

14. (本题满分 7 分) 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ x^2, & x \leq 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$ 。

15. (本题满分 7 分) 说明函数 $y = \frac{|x| \cdot \sin x}{x^2(x-1)}$ 的间断点及类型。

二. (本题满分 10 分) 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x dx$ 。

三. (本题满分 10 分) 求二元函数 $z = x^2 + y^2 - 8 \ln x - 18 \ln y$ 的极值。

四. (本题满分 10 分) 设抛物线的方程为 $y = ax^2 + bx$, 当 $x \in [0, 1]$ 时,

$y \geq 0$ 。确定 a, b 的值, 使抛物线与直线 $x = 1, y = 0$ 围的平面图形面积为

$\frac{4}{9}$, 且该图形绕 x 轴旋转得到的旋转体体积最小。

五. (本题满分 10 分) (1) 验证 $y_1 = x$ 是二阶线性齐次方程

$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$ 的一个解;

(2) 设 $y_2 = xu(x)$ 也是上述方程的解, 求一个不为常数函数的 $u(x)$;

(3) 写出 (1) 中微分方程的通解。

六. (本题满分 10 分) (1) 证明 $x > 0$ 时, $e^x - 1 > x$;

(2) 证明极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{3^2})(1 + \frac{1}{3^3}) \cdots (1 + \frac{1}{3^n})$ 存在。