

# 常州大学

## 2011年硕士研究生入学考试初试试题 (A卷)

科目代码: 601 科目名称: 理学数学 满分: 150分

注意: ①认真阅读答题纸上的注意事项; ②所有答案必须写在答题纸上, 写在本试题纸或草稿纸上均无效; ③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回!

### 一、简答题: (共 15 题, 共计 100 分)

1. (本题满分 6 分) 求曲线  $\begin{cases} x = t \ln t \\ y = \frac{\ln t}{t} \end{cases}$  在对应参数  $t=1$  的点处的法线方程。

2. (本题满分 6 分) 求不定积分  $\int \frac{x^2 + \sin^2 x}{(x^2 + 1)\cos^2 x} dx$ 。

3. (本题满分 6 分) 分别举出一组函数  $f(x)$ ,  $g(x)$  使得

(1)  $f(x)$  为单调函数,  $g(x)$  为单调函数, 但  $f(x)+g(x)$  不是单调函数;

(2)  $f(x)$  为单调函数,  $g(x)$  不是单调函数, 但  $f(x)+g(x)$  是单调函数。

4. (本题满分 6 分) 设  $\frac{1}{z} - \frac{1}{x} = f\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$ , 其中  $f(u)$  可微, 求  $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y}$ 。

5. (本题满分 6 分) 设  $y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$ , 求  $y''(0)$ 。

6. (本题满分 7 分) 求  $y = x^{\frac{1}{x}}$  在  $(0, +\infty)$  内的极值。

7. (本题满分 7 分) 一平面  $\pi$  过点  $M(1, 0, 1)$ , 直线  $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = z$  在平面  $\pi$  内, 求平面  $\pi$  的方程。

8. (本题满分 7 分) 设  $y = \int_0^x \sin(x-t)^2 dt$ , 求  $y'$ 。

9. (本题满分 7 分) 已知曲线  $y = x^4 + ax^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$  在整个定义域内为凹的, 求  $a$  的取值范围。

10. (本题满分 7 分) 求  $\iint_D \frac{1}{x+y} dx dy$ ,  $D$  为由  $x=0, x=y, y=1$  及  $y=2$  围成的闭区域。

11. (本题满分 7 分) 求  $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$ 。

12. (本题满分 7 分) 求解微分方程  $xy' + y = x^2 + 3x + 2$ 。

13. (本题满分 7 分) 已知  $f(x)$  是微分方程  $xf'(x) - f(x) = \sqrt{4x - x^2}$  的满足初始条件  $f(2) = 0$  的特解, 求  $\int_0^2 f(x) dx$ 。

14. (本题满分 7 分) 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 - x - 1})$ 。

15. (本题满分 7 分) 设  $f(x) = \begin{cases} x^a \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续且可导, 确定参数  $a$  的取值范围。

值范围。

二、(本题满分 10 分)

设  $f(x)$  二阶可导, 且  $f'(x) = f(2-x)$ ,

(1) 证明  $f''(x) + f(x) = 0$ ;

(2) 求  $f(x)$ 。

三、(本题满分 10 分)

设有一圆板占有平面区域  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$ , 在某环境中圆板上点  $(x, y)$  处的温度

为  $T = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ , 求圆板上温度的最高点与最低点。

四、(本题满分 10 分)

若  $x \rightarrow 0$  时,  $1 - \cos x - (ax^2 + bx + c)$  是比  $x^2$  的高阶无穷小, 求  $a, b, c$  的值。

五、(本题满分 10 分)

过坐标原点作曲线  $y = e^x$  的切线, 该切线与  $y$  轴及曲线  $y = e^x$  围成的区域记为  $D$ ,

求 (1)  $D$  的面积;

(2)  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积。

六、(本题满分 10 分)

设  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上连续, 在  $(0, 2)$  内可导, 且  $f(0) = f(2) = 0$ 。证明在  $(0, 2)$  内方程

$(x^2 + e^2)f'(x) = -2xf(x)$  有实根。