苏 州 科 技 学 院

2008 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业：基础数学　　试题编号：613　　试题名称：数学分析

请考生注意：试 题 解 答 务 请 考 生 做 在 专 用 “答题纸” 上；
做在其它地方的解答将视为无效答题，不予评分。

一、本题共九个小题，每小题 10 分，共 90 分.

1．设 $\alpha=\sup\left\{f(x)\middle|a\le x\le b\right\}$. 证明：存在数列 $\{x_n\}$ 满足 $a\le x_n\le b$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(x_n\right)=\alpha$ 成立.

2．求极限 $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

3．计算不定积分 $\int\frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx$.

4．证明：由方程 $z=y+x\varphi(z)$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial y}[\varphi^2(z)\frac{\partial z}{\partial y}]$$

其中 φ 二阶可导.

5．设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，试问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a_n+1})^n$ 是否收敛？并说明理由.

6．设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上连续函数，证明：若对任意 $x\in[a,b]$，存在 $y\in[a,b]$，使 $\left|f(y)\right|\le\frac{1}{2}\left|f(x)\right|$，则存在 $x_0\in[a,b]$，使 $f(x_0)=0$.

7．讨论广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx\ (n\ge0)$ 的敛散性.

8．设 $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}\sin\dfrac{1}{x}$， $a>0$ 为任一正常数，试证 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

9．求常数 λ，使得曲线积分 $\int_L \dfrac{x}{y}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}dx-\dfrac{x^2}{y^2}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}dy=0$ 对上半平面内任何光滑闭曲线 L 成立.

二、本题共四个小题, 每小题 15 分，共 60 分.

1．设 $f(x)$ 在 $(a,\ b+1)$ 内有连续导函数 $f'(x)$, $(a<b)$,记

$f_n(x)=n\left[f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-f(x)\right]$, $x\in(a,b)$, n=1,2,⋯ . 证明：对任意 $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta f_n(x)\,dx=f(\beta)-f(\alpha)$.

2． $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

求证：在 $(0,0)$ 处，$f(x,y)$ 连续但不可微.

3．计算曲面积分 $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中 S 是球面

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$，并取外侧为正向.

4. 设 $f(x)$ 在任意有限区间上可积且满足方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,证明：

$f(x)=ax$，其中 $a=f(1)$.