苏州科技学院

2010年攻读硕士学位研究生入学考试试题

专业：基础数学　　考试科目：高等代数　　科目代码：818

1. （20 分）设 $f(x),g(x)$ 不全为零，证明：如果 $(f(x),g(x))=d(x)$，则 $(f^n(x),g^n(x))=d^n(x)$。

2. （20分）若向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示，证明：表示法唯一的充分必要条件是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关。

3. （20 分） 设 A 为 n 阶实方阵，证明：$r(AA')=r(A'A)=r(A)$，其中 $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩，A' 表示矩阵 A 的转置。

4. （20 分）设 σ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，证明：

$\dim\sigma(V)+\dim\sigma^{-1}(0)=n$，其中 $\dim(V)$ 表示线性空间 V 的维数。

5. （20 分）设 σ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，证明：若 $\xi\in V,\sigma^{n-1}(\xi)\neq 0$，但 $\sigma^n(\xi)=0$，则对任意 $\alpha\in V$，有 $\sigma^n(\alpha)=0$，并求 σ 的核的维数。

6. （20 分）设 A,B 是数域 P 上的 n 阶方阵，E 是 n 阶单位矩阵，且 $AB=A-B$，证明：（1） $(A+E)^{-1}=E-B$；（2） $AB=BA$。

7. （20 分）设 σ 是 n 维欧氏空间 V 的正交变换，V 的子空间 W 是 σ 的不变子空间，证明：W 的正交补 $W^{\perp}$ 也是 σ 的不变子空间。

8. （10 分）证明：若 A,B 都是正定矩阵，则 $|\lambda A-B|$ 的根都是正数。