

# 苏州科技学院

## 2010 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

专业: 070101 基础数学

考试科目: 数学分析

科目代码: 613

一、1 求极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \cos \frac{\alpha}{x} + \sin \frac{\alpha}{x} \right)^x \quad (\alpha \neq 0) \quad . (10 \text{ 分})$$

2 设  $a_k > 0, k = 1, 2, \dots, p$ . 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^p a_k^n \right)^{\frac{1}{n}} = \max\{a_1, \dots, a_p\} \quad . (10 \text{ 分})$$

二、设函数  $z = f(x, y)$  在点  $(1, 1)$  处可微, 且  $f(1, 1) = 1, \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(1,1)} = 2, \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(1,1)} = 3$ ,

$$\varphi(x) = f(x, f(x, x)), \text{ 求 } \frac{d}{dx} \varphi^3(x) \Big|_{x=1} \quad . (15 \text{ 分})$$

三、设函数  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上连续,  $f''(x)$  在  $(a, +\infty)$  内存在且大于零, 记

$$F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (x > a)$$

证明  $F(x)$  在  $(a, +\infty)$  内单调增加. (15 分)

四、若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$  存在,  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 则  $A = 0$ . (10 分)

五、设  $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right) \quad (n = 1, 2, \dots)$ , 证明

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在; (7 分)

(2) 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$  收敛. (8 分)

六、求二重积分

$$\iint_D y[1 + xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]dxdy$$

的值, 其中  $D$  是由直线  $y = x, y = -1$  及  $x = 1$  围成的平面区域。(15 分)

七、设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上可微,  $\forall x \in [0, 1], 0 < f(x) < 1$  且  $f'(x) \neq 1$ , 证明存在唯一的  $x \in (0, 1)$  使得  $f(x) = x$ 。(15 分)

八、计算第二型曲线积分

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$$

其中  $L$  是以点  $(1, 0)$  为中心  $R$  为半径的圆周 ( $R \neq 1$ ), 取逆时针方向为正向。(15 分)

九、设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有定义, 在  $x = 0, 1$  两点连续, 且满足

$$f(x^2) = f(x), x \in (-\infty, +\infty)$$

证明  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上为常数。(15 分)

十、证明函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^2}{(1+x^2)^n}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上一致收敛。(15 分)