

苏州科技学院

2011 年硕士研究生入学考试初试试题

科目代码: 819 科目名称: 高等代数 满分: 150 分

1. (20 分) m, p, q 满足什么条件时, 有 $x^2 + mx - 1 \mid x^3 + px + q$.
2. (20 分) 特征值全为实数的 n 阶实方阵是否一定相似于对角矩阵? 如果是, 请给出证明, 否则, 举出反例.
3. (20 分) 若 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示, 证明: 表示法唯一的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关.
4. (20 分) 设 $-2, 1, 1, -4$ 是 4×4 矩阵 A 的特征值, 计算行列式 $|A^2 - 2A + 7E|$, 其中 E 为 4×4 阶单位矩阵.
5. (20 分) 设 σ 是 n 维线性空间 V 的线性变换, 证明: $\sigma^2 = \sigma$ 当且仅当存在 V 的子空间 W 及 W_1 , 使得 $V = W + W_1$, 且 $\forall \alpha \in W, \forall \beta \in W_1$, 有 $\sigma(\alpha) = \alpha, \sigma(\beta) = 0$.
6. (20 分) 证明: 若 A, B 都是正定矩阵, 则 $|\lambda A - B|$ 的根都是正数.
7. (20 分) 设 n 阶方阵 A 的行列式为 $|A| = d$, 矩阵 $E - A$ 的特征值的绝对值都小于 1, 其中 E 为 n 阶单位矩阵, 证明: $0 < |d| < 2^n$, 其中 $|d|$ 表示 d 的绝对值.
8. (10 分) 设 $A \in R^{n \times n}$, 若 $A^n \neq 0$, 证明: 对任意正整数 $k, A^k \neq 0$.