苏州科技学院

2012年硕士研究生入学考试初试试题

科目代码：823　科目名称：高等代数　满分：150 分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

1.（20分）若n阶实方阵A的特征值均为正数，试证矩阵$B=A^2+5A+6E$（其中E表示n阶单位矩阵）是可逆矩阵。

2.（20分）设多项式$f(x),g(x)$不全为0，证明：$(f(x),g(x))^n=(f^n(x),g^n(x))$，其中$(f(x),g(x))$表示$f(x),g(x)$的最大公因式，$n$为正整数。

3.（20分）设n阶方阵A的行列式为$|A|=d$，而矩阵$E-A$的特征值的绝对值都严格小于2，其中E为n阶单位矩阵，证明：$0\le|d|<3^n$，其中$|d|$表示d的绝对值。

4.（20分）设A为一n阶方阵，证明：存在一个n阶非零方阵B使$AB=O$的充分必要条件是$|A|=0$，其中O表示零矩阵。

5.（20分）设向量组$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_m$线性无关，证明向量组$\vec{\beta}_j=a_{11}\vec{\alpha}_1+a_{21}\vec{\alpha}_2+\cdots+a_{m1}\vec{\alpha}_m$，$(j=1,2,\cdots,m,\ a_{ij}$为实数)，线性无关的充分必要条件是行列式$|(a_{ij})|\ne 0$。

6.（20分）若将n阶实对称矩阵按合同分类，即两个n阶实对称矩阵属于同一类当且仅当它们合同，问共有几类？

7.（20分）设σ是数域P上的n维线性空间V上的线性变换，证明：

1° 存在P$[x]$中次数$\le n$的多项式$f(x)$，使$f(\sigma)=0$；

2° 如果$f(\sigma)=0,g(\sigma)=0$，则$d(\sigma)=0$，其中$d=(f,g)$为f,g的最大公因式；

3° σ可逆当且仅当存在一常数项不为0的多项式$f(x)$，使得$f(\sigma)=0$。

8.（10分）设A为n阶实方阵，若n维实向量ξ满足$A^{k-1}\vec{\xi}\ne\vec{0},\ A^k\vec{\xi}=\vec{0}\ (k\ge 1)$，证明：向量组$\vec{\xi},A\vec{\xi},\cdots,A^{k-1}\vec{\xi}$线性无关。