

南京财经大学

2007 年攻读硕士学位研究生入学考试（初试）试卷

考试科目： 614 数学分析

适用专业： 应用数学

考试时间： 2007 年 1 月 21 日上午 8:30 — 11:30

注意事项： 所有答案必须写在答题纸上，做在试卷或草稿纸上无效。

一、 计算题 （共 5 题，每题 10 分，共计 50 分）

- (1) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n^{3/2}}$ 。
- (2) 已知 $2\sin(x + 2y - 3z) = x + 2y - 3z$ ，求 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ 。
- (3) 求不定积分 $\int |x| dx$ 。
- (4) 求二次积分 $\int_0^1 dx \int_x^1 x^2 e^{-y^2} dy$ 。
- (5) 求函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\pi, 0) \\ 0, & x \in [0, \pi) \end{cases}$ 的傅里叶级数展开式。

二、 （共 1 题，共计 12 分）

设定义在 $[0, 1]$ 上的函数 $f(x)$ 满足： $0 \leq f(x) \leq 1$ ，和对任意 $x, y \in [0, 1]$ ，有

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|, \text{ 其中 } \alpha \text{ 是常数 且 } 0 < \alpha < 1,$$

则必存在唯一 $\bar{x} \in [0, 1]$ ，使得 $f(\bar{x}) = \bar{x}$ 。

三、 （共 1 题，共计 12 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续且在 $(0, 1)$ 内可微。若 $9 \int_{\frac{8}{9}}^1 f(x) dx = f(0)$

证明：存在 $\xi \in (0, 1)$ ，使得 $f'(\xi) = 0$ 。

四、(共 1 题，共计 12 分)

讨论含参量反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x dx$ 在 (1) $y \in (0, +\infty)$ ；(2) $y \in [\alpha_0, +\infty)$ ($\alpha_0 > 0$) 上的一致收敛性。

五、(共 1 题，共计 12 分)

讨论函数 $f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^t + x^t)}{t}$ ($x > 0$) 的可导性。

六、(共 1 题，共计 12 分)

设数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛，极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = r$ 存在，求 r 的值，并举出满足这些条件的例子。

七、(共 1 题，共计 12 分)

设函数 $f(x)$ 连续， $f(0) = 1$ ， $F(t) = \iint_{x^2 + y^2 \leq t^2} f(x^2 + y^2) dx dy$ ，($t \geq 0$)，求 $F''(0)$ 。

八、(共 1 题，共计 12 分)

设 $a > 0$ ，讨论方程 $\ln x = ax^2$ 有几个实根。

九、(共 1 题，共计 10 分)

设函数 $f_0(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续，且函数列 $\{f_n(x)\}$ 的定义如下：

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt, n = 1, 2, \dots, \text{证明 } \{f_n(x)\} \text{ 在 } [0, a] \text{ 上一致收敛于 } 0.$$

十、(共 1 题，共计 6 分)

设 $H(x) = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} x_i x_j$, 其中 $A = (a_{ij})$ 是 3 阶正定对称矩阵, 证明:

$$\iiint_{H(x) \leq 1} e^{\sqrt{H(x)}} dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{4\pi}{\sqrt{\det A}} (e - 2),$$

其中 $\det A$ 是 A 的行列式。