南 京 财 经 大 学

2007年攻读硕士学位研究生入学考试(初试)试卷

考试科目：418 高等代数

适用专业：应用数学

考试时间：2007年1月21日下午14:00-17:00

注意事项：所有答案必须写在答题纸上，做在试卷或草稿纸上无效.

1. (15分) 设 $f(x), h(x)$ 及 $g(x)\neq 0$ 为三个多项式，证明

$$(f(x), g(x)) = (f(x)-h(x)g(x), g(x)).$$

2. (15分) 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n^n & a_n^{n-1}b_n & \cdots & a_nb_n^{n-1} & b_n^n \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix},$$

其中 $a_i\neq 0, b_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n+1.$

3. (15分) 证明方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2=a_1 \\ x_2-x_3=a_2 \\ x_3-x_4=a_3 \\ x_4-x_5=a_4 \\ x_5-x_6=a_5 \\ x_6-x_1=a_6 \end{cases}$$

有解的充分必要条件为 $\sum_{i=1}^{6}a_i=0$. 有解时，求其一般解.

4. (20 分) 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_3$. 令 $B=(kE+A)^2$,

其中 k 为实数, A 为 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵, E 为 3 阶单位矩阵.

(1) 证明存在正交矩阵 Q 同时将 A 与 B 化为对角形.

(2) 求出化二次型 $g(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)B\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 为标准形的正交变换，并

确定 k 为何值时，$g(x_1,x_2,x_3)$ 为正定二次型.

5. (25 分) 设 A,B 为 n 阶方阵, E 为 n 阶单位矩阵. 证明

(1) 若 $AB=0$, 并且 秩($A+B$) $=n$, 则 秩(A) + 秩(B) $=n$.

(2) 若 $A^2=A$, 则 秩(A) + 秩 $(A-E)$ $=n$.

(3) 若 $A^2=A$, 则 A 的特征值为 0 或 1, 且 A 可对角化.

6. (10 分) 证明若 A 为正定矩阵, 则对任何实向量 x,y, 有

$(x^TAy)^2\le(x^TAx)(y^TAy)$, 且等号成立的充要条件为 x,y 线性相关.

7. (30 分) 设 σ 为数域 **P** 上的 n 维线性空间 V 的一个线性变换, σ 在 V 的某个基下的矩阵为 A. 如果 A 的最小多项式 $m_A(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)$ 为 **P** 上一次互素因式之积.

(1) 证明 $V_i=\{\xi\mid(\sigma-\lambda_i I)\xi=0,\xi\in V\}$ $(i=1,2,\cdots,k)$ 为 V 的σ-不变子空间，此处 I 为 V 的恒等变换.

(2) 证明 V 可分解为 V_i 的直和，即 $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_k$.

(3) 证明 A 可对角化，并且题中关于 A 的最小多项式的条件也是 A 可对角化的必要条件.

(4) 若 **P** 为复数域，则 A 为复矩阵，关于 A 可对角化将有何相应结论?

8. (20 分) 设σ 为数域 **P** 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换.

(1) 证明 $V=\sigma(V)\oplus\ker(\sigma)$ 的充要条件为 秩$(\sigma^2)=$ 秩(σ).

(2) 若$\sigma^2=\sigma$，则σ 在基下的矩阵为

$$\begin{bmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{bmatrix},$$ 且 1 的个数为σ 的秩.