

南京财经大学

2008 年攻读硕士学位研究生入学考试（初试）试卷

考试科目： 614 数学分析

适用专业： 应用数学

考试时间： 2008 年 1 月 20 日上午 8:30 — 11:30

注意事项： 所有答案必须写在答题纸上，做在试卷或草稿纸上无效。

一、 计算题 （共 5 题，每题 10 分，共计 50 分）

(1) 求函数 $f(x) = \frac{1}{a^2 - b^2 x^2}$ ($a \neq 0$) 的 n 阶导数。

(2) 设 $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$ ，其中 f 为可微函数，求 $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y}$ 。

(3) 求全微分 $(\frac{1}{y} + x - y \sin xy) dx + (y^2 - \frac{x}{y^2} - x \sin xy) dy$ 的原函数 $u(x, y)$ 。

(4) 求函数 $f(x) = \frac{1}{x^3}$ 在 $x=1$ 处的 Taylor 级数展开式。

(5) 求第二型曲面积分 $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$ ，其中 S 为立方体

$0 \leq x, y, z \leq a$ 的表面，方向取外侧。

二、 （共 1 题，共计 12 分）

设 $c > 0$ ，任取 $0 < x_0 < \frac{1}{c}$ ，作迭代序列 $x_{n+1} = x_n(2 - cx_n)$ ($n=0, 1, 2, \dots$)。

证明极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在，并求此极限。

三、（共 1 题，共计 12 分）

设 $f''(x) > 0$, $(x \in [0, 1])$, 证明: $\int_0^1 f(x^\alpha) dx \geq f(\frac{1}{\alpha+1})$, 其中 α 为任意正实数。

四、（共 1 题，共计 12 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1) = f(0) = f'(1) = f'(0) = 0$, 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f''(\xi) = f(\xi)$ 。

五、（共 1 题，共计 12 分）

讨论函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$, 在 (1) $x \in (0, +\infty)$; (2) $x \in [\alpha, +\infty)$ ($\alpha > 0$) 上的一致收敛性。

六、（共 1 题，共计 12 分）

把函数 $f(x) = (x-1)^2$ 在 $(0, 1)$ 上展开成余弦级数, 并推出 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ 。

七、（共 1 题，共计 12 分）

设 $f(t)$ 在 $[1, 2]$ 上可积, D 是由曲线 $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=4x$ 所围成的区域在第一象限中的部分, 证明: $\iint_D f(\sqrt{xy}) d\sigma = \ln 2 \int_1^2 f(\sqrt{t}) dt$ 。

八、（共 1 题，共计 10 分）

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内有二阶导数, 且 $f(0)f(1) > 0$, 当 $0 < x < 1$ 时, 有 $f''(x) > 0$, $\int_0^1 f(x) dx = 0$, 则函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内恰有两个零点。

九、（共 1 题，共计 10 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且有唯一的取到 $f(x)$ 最大值的点 x_0 , 又设

$x_n \in [a, b], n = 1, 2, \dots$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$, 求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ 。

十、(共 1 题, 共计 8 分)

设 $P(x, y), Q(x, y)$ 在全平面上连续且具有一阶连续偏导数, 若积分

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0, \text{ 其中 } L \text{ 为半圆: } y = y_0 + \sqrt{a^2 - (x - x_0)^2}, x_0, y_0$$

为任意实数, a 为任意正数.

证明: $P(x, y) \equiv 0$ 和 $\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv 0$ 。