

南京财经大学

2008 年攻读硕士学位研究生入学考试(初试)试卷

考试科目: 818 高等代数

适用专业: 应用数学

考试时间: 2008 年 1 月 20 日下午 2:00-5:00

注意事项: 所有答案必须写在答题纸上, 做在试卷或草稿纸上无效.

1. (15 分) 设 $f(x), g(x)$ 为两个非 0 多项式, 证明存在正整数 N , 使对任意大于 N 的两个正整数 n, m , 都有

$$(f^n(x), g(x)) = (f^m(x), g(x)).$$

2. (15 分) 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & \beta_1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & \beta_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n & 0 \end{vmatrix}.$$

3. (20 分) 设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{bmatrix},$

M_i 为 A 中划去第 i 列剩下的 $(n-1) \times (n-1)$ 方阵的行列式.

- (1) 证明 $C = (M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{n-1} M_n)^T$ 为 $Ax = 0$ 的一个解.

(2) 若秩 $(A) = n - 1$, 则 $Ax = 0$ 的所有解向量均为 C 的线性组合.

4. (20 分) 证明: (1) 对任何实矩阵 $A_{m \times n}$, $A = 0$ 当且仅当 $A^T A = 0$.

(2) 设 $A_i (i=1,2,\dots,t)$ 为同阶实对称矩阵, 则 $\sum_{i=1}^t A_i^2 = 0$ 当且仅当

$$A_i = 0 (i=1,2,\dots,t).$$

5. (20 分) 证明: (1) 若 A 为正定矩阵, 则存在正定矩阵 P , 使得 $A = P^2$.

(2) 若矩阵 A, B 同阶, 且 A 正定, B 半正定, 则 AB 的特征值均为非负实数.

6. (20 分) 设 X 为数域 $\mathbf{P}$ 上线性空间 V 的一个子集, 称 V 在 X 上自由, 若对 $\mathbf{P}$ 上任一线性空间 W , 及任一映射 $g: X \rightarrow W$, 均存在线性映射 $f: V \rightarrow W$, 使 f 在 X 上的限制 $f|_X = g$. 此时也称 V 是自由的. (f 是线性映射指: f 是 V 到 W 的一个映射, 且保持向量加法及数量乘法运算). 证明:

(1) $\mathbf{P}$ 上任一 n 维向量空间是自由的.

(2) 对无穷维线性空间上述结论是否成立? 若成立, 给出证明; 若否, 给出反例.

7. (20 分) 设 σ 为数域 $\mathbf{P}$ 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换, $g(x), h(x)$ 均为 $\mathbf{P}$ 上的多项式, $f(x) = g(x)h(x)$, 且 $f(\sigma) = 0$. 记

$$U = \ker(g(\sigma)), W = \ker(h(\sigma)), \text{ 证明}$$

(1) U 和 W 均为 σ -不变子空间.

(2) 若 $g(x)$ 与 $h(x)$ 互素, 则 $V = U \oplus W$.

8. (20 分) 设 V 为数域 $\mathbf{P}$ 上的 n 维线性空间, 求证:

- (1) V 的所有线性变换构成的线性空间 $L(V)$ 是 n^2 维的.
 - (2) 若 $A \in L(V)$, 则存在次数不超过 n^2 的 $\mathbf{P}$ 上的多项式 $f(x)$, 使 $f(A) = 0$.
 - (3) A 可逆当且仅当有一常数项不为 0 的多项式 $f(x)$, 使 $f(A) = 0$.
- (要求: 在证明(2)和(3)两小题时, 不允许直接使用 Hamilton-Cayley 定理)