南 京 财 经 大 学

2009 年攻读硕士学位研究生入学考试（初试）试卷 A

考试科目：614 数学分析

适用专业：应用数学

考试时间：2009 年 1 月 11 日上午 8：30 — 11：30

注意事项：所有答案必须写在答题纸上，做在试卷或草稿纸上无效。

一、 计算题 （共 6 题，每题 10 分，共计 60 分）

（1） 求不定积分 $\int \frac{x^2}{(1-x)^{2009}} dx$ 。

（2） 求全微分 $(2x\cos y + y^2 \cos x)\,dx + (2y\sin x - x^2 \sin y)\,dy$ 的原函数 $u(x,y)$ 。

（3） 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{\sin(x^4)}$ 。

（4） 设二元函数 $z = z(x, y)$ 由 $x^2 + y^2 + z^2 = xy\,f(z^2)$ 所确定，其中 f 为可微函数，求 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ 。

（5） 求曲线积分 $\int_L ydx + zdy + xdz$，其中 L 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与 $x + y + z = 0$ 的交线，从 x 轴的正方向看去，此交线的方向是逆时针方向。

（6）将函数 $f(x) = x^2\ (-\pi \le x \le \pi)$ 展开成傅里叶级数，并且求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ 的和。

二、（共 1 题，共计 10 分）

设$x_1=1$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{5}{x_n})$，$n=1,2,\cdots$。

证明：数列$\{x_n\}$收敛并且求其极限。

三、（共 1 题，共计 10 分）

设函数$f(x)$在$[0,b]$上连续且在$(0,b)$内可导，$f(0)f(b)<0$。

证明存在$\xi\in(0,b)$，使得$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$。

四、（共 1 题，共计 10 分）

证明曲面$z^2=(x^2+y^2)f(\frac{y}{x})$的所有切平面都经过某个定点，其中$f$为可微函数。

五、（共 1 题，共计 10 分）

证明$f(x)=\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上一致连续。

六、（共 1 题，共计 10 分）

设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，且$\lim_{n\to\infty}na_n=0$，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$。

七、（共 1 题，共计 10 分）

设在$[a,+\infty)\times[c,d]$内成立不等式$|f(x,y)|\le F(x,y)$。若$\int_a^{+\infty}F(x,y)dx$在$y\in[c,d]$上一致收敛，证明$\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$在$y\in[c,d]$上一致收敛和绝对收敛。

八、（共 1 题，共计 10 分）

设一元函数 $f(u)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，证明：

$$\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} f(x+y)\,dx\,dy=\int_{-1}^{1} f(u)\,du\text{。}$$

九、（共 1 题，共计 12 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续可导且 $f(0)=0$。

（1）求证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}f(\frac{x}{n})$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛；

（2）设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}f(\frac{x}{n})$，求证 $S(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续可导。

十、（共 1 题，共计 8 分）

设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)\,dx=0$，$\int_0^1 xf(x)\,dx=1$。求证：

$$\max_{0\le x\le 1}|f(x)|>4\text{。}$$