# 南 京 财 经 大 学

## 2009年攻读硕士学位研究生入学考试(初试)试卷

考试科目：　818 高 等 代 数

适用专业：　应 用 数 学

考试时间：　2009年1月 11 日下午 2：00—5：00

注意事项：所有答案必须写在答题纸上，做在试卷或草稿纸上无效.

---

**1.** (15分) 计算$n$阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}.$$

**2**. (15 分) 设$f(x), g(x)$为数域 $P$ 上的两个多项式，$m$为给定的正整数. 若 $f^m(x)\mid g^m(x)$，则$f(x)\mid g(x)$.

**3.** (20分) 已知方程组

$$\text{(I)}\ \begin{cases} 3x_1-x_2-x_3=3, \\ 4x_1-x_2-x_3-x_4=1, \\ x_1+x_2-2x_4+6=0, \end{cases} \qquad \text{(II)}\ \begin{cases} x_3-2x_4=1-t, \\ x_1+mx_2-x_3-x_4=-5, \\ nx_2-x_3-2x_4=-11, \end{cases}$$

(1) 求方程组(I)的通解；

(2) 确定$m,n,t$的值，使方程组(I)与(II)同解.

**4.** (25分) 设 **A, B** 为$n$阶方阵，**E** 为$n$阶单位矩阵. 证明:

(1) 若 $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$，则 秩$(\mathbf{A})+$秩$(\mathbf{B})\le n$.

(2) 若 $\mathbf{A}^2=\mathbf{E}$, 则 秩$(\mathbf{A}-\mathbf{E})$ + 秩$(\mathbf{A}+\mathbf{E})$ $=n$.

(3) 若 $\mathbf{A}^2=\mathbf{E}$, 则 $\mathbf{A}$ 的特征值为±1, 且 $\mathbf{A}$ 可对角化.

**5.** (20 分) 设 $\mathbf{A}$ 为 $n$ 阶正定矩阵，$\mathbf{B}$ 为 $n$ 阶实对称矩阵. 证明存在可逆线性变换 $\mathbf{x}=\mathbf{L}\mathbf{y}$, 同时化二次型 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ 及 $g(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x}$ 为标准形，此处 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,\mathbf{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$.

**6.** (25 分) 设 $\mathbf{A}\in P^{n\times n}$, $V(\mathbf{A})=\{\mathbf{B}\mid\mathbf{B}\in P^{n\times n}$且$\mathbf{AB}=\mathbf{O}\}$, 其中 $P^{n\times n}$ 表示数域 $P$ 上的 $n\times n$ 矩阵空间. 证明：

(1) $V(\mathbf{A})$ 是 $P^{n\times n}$ 的子空间；

(2) 设 $r(\mathbf{A})=r$, 求 $V(\mathbf{A})$ 的一组基和维数.

**7.** (30 分) 设 $\boldsymbol{\sigma}$ 为线性空间 $V$ 的一个线性变换, 且 $\boldsymbol{\sigma}^2=\boldsymbol{\sigma}$. 证明：

(1) $\boldsymbol{\sigma}$ 的特征值为 0 或 1；

(2) 若 $V_\lambda$ 表示对应特征值 $\lambda$ 的特征子空间，则 $V_1=\boldsymbol{\sigma}V, V_0=\boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{0})$；

(3) $V=V_1\oplus V_0$, 且 $\boldsymbol{\sigma}$ 只有特征值 0 当且仅当 $\boldsymbol{\sigma}$ 为零变换.