南 京 财 经 大 学

2010 年攻读硕士学位研究生入学考试(初试)试卷

考试科目：　818 高 等 代 数

适用专业：　应 用 数 学

考试时间：　2010 年 1 月 10 日下午 2：00—5：00

注意事项：所有答案必须写在答题纸上，做在试卷或草稿纸上无效.

一、(15 分)设 α_1，α_2，Λ，α_n 为互不相同的数，证明

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \Lambda & \lambda^{n-1} \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \Lambda & \alpha_1^{n-1} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 1 & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1}^2 & \Lambda & \alpha_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$ 为 λ 的 $n-1$ 次多项式，并求出其所有根。

二、(20 分)设 A 为 $s\times n$ 阶矩阵，b 为 n 维列向量，证明：$AX=0$ 的解全为 $b^T X=0$ 的解当且仅当 b^T 可由 A 的行向量线性表示。

三、（20 分）若 n 阶矩阵 A 为正定矩阵，B 为半正定矩阵，则对任意 $u\geq 0$，$|A+uB|\geq|A|$，并且等号成立当且仅当 $B=0$ 或 $u=0$。

四、（30 分）设 $f(x)$ 为数域 P 上的多项式，且 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$，$(f_1(x),f_2(x))=1$，若 σ 为 P 上线性空间 V 的一个线性变换，并且 $f(\sigma)=0$，则

（1）$\ker f_i(\sigma)(i=1,2)$ 均为 V 的 $\sigma-$不变子空间；

（2）$V=\ker f_1(\sigma)\oplus\ker f_2(\sigma)$。

五、（25 分）设 n 阶复矩阵 A 的特征值为 $\lambda_i(i=1,2,\Lambda,n)$，$\varphi(t)$ 为 t 的 r 次多项式，

证明：（1）$\varphi(A)$ 的特征值为 $\varphi(\lambda_i)(i=1,2,\Lambda,n)$；（2）$|\varphi(A)|=\varphi(\lambda_1)\Lambda\ \varphi(\lambda_n)$。

六、（25 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2bx_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 可经

正交替换 $X=TY$ 化为 $g(y_1,y_2,y_3)=y_2^2+4y_3^2$，其中 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，$Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，

求 a，b 的值及正交替换 T。

七、（15 分）证明：有理数域上存在任意次数的不可约多项式。