南 京 财 经 大 学

2011 年攻读硕士学位研究生入学考试（初试）试卷 A

考试科目： 818 高等代数 　适用专业： 应用数学 　满分 150 分

考试时间： 2011 年 1 月 16 日下午 2：00——5：00

注意事项：所有答案必须写在答题纸上，做在试卷或草稿纸上无效；

请认真阅读答题纸上的注意事项，试题随答卷一起装入试题袋中交回。

一（15 分）计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\alpha & \ddots & & \\ & 1 & \ddots & 1 & \\ & & \ddots & 2\cos\alpha & 1 \\ & & & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$$

二（15 分）证明：x^p+px+1（p 为奇素数）在有理数域上不可约。

三（20 分）设 A 为 n 阶非零实矩阵，若 A 的任一元素均与其代数余子式相等

$AX=0$ 仅有零解。

四（20 分）设 $f(X)=X^TAX$，$g(X)=X^TBX$ 为实二次型，且 $f(X)$ 正定，证明：存在可逆线性变换化 $f(X)$ 为规范型，同时化 $g(X)$ 为标准形，并且 $g(X)$ 的标准形各项系数均为 $|xA-B|=0$ 的根。特别，若 $g(X)$ 也正定，则 $g(X)$ 的标准形各项系数均大于零。

五（20 分）设 σ 为线性空间 V 的一个线性变换，其最小多项式 $m(\lambda)=m_1(\lambda)m_2(\lambda)$，且 $(m_1(\lambda),m_2(\lambda))=1$，则

（1）$\ker m_i(\sigma)\ (i=1,2)$ 均为 V 的 $\sigma-$不变子空间；

（2）$V=\ker m_1(\sigma)\oplus\ker m_2(\sigma)$。

六（20 分）设 P 为数域，$A\in P^{n\times s},B\in P^{s\times n}$，证明：

（1）$V=\{B\alpha\mid AB\alpha=0,\alpha\in P^n\}$ 是 P^s 的子空间；

（2）V 的维数为 $r(B)-r(AB)$。

七（20 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2，求：（1）c 的值；（2）正交替换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准形。

八（20 分）设向量 $\alpha_1=(1,2,-1,0)^T$，$\alpha_2=(1,1,0,2)^T$，$\alpha_3=(2,1,1,a)^T$，V 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 生成的空间。已知 V 的维数为 2，$\beta=(2,5,-3,b)^T$，且 $\beta\in V$，求：（1）a,b 的值；（2）V 的一个标准正交基，并求 β 在此基下的坐标。