南 京 财 经 大 学

2011 年攻读硕士学位研究生入学考试（初试）试卷 A

考试科目：614 数学分析 适用专业：应用数学 满分 150 分

考试时间：2011 年 1 月 16 日上午 8：30——11：30

注意事项：所有答案必须写在答题纸上，做在试卷或草稿纸上无效；

请认真阅读答题纸上的注意事项，试题随答卷一起装入试题袋中交回。

一、 计算题 （共 5 题，每题 8 分，共计 40 分）

（1）求第二型曲面积分 $\oiint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$，其中 S 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$，方向取外侧。

（2）设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0,\ f''(0)=4,$ 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$。

（3）设 $w=f(x+y,x-y,x)$，其中 f 有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$。

（4）在区间 $(0,2\pi)$ 内将函数 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ 展开成傅里叶级数。

（5）求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ 的 n 阶导数。

二、（共 1 题，共计 12 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导，且 $f(1)=2f(0)$，求证：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $(\xi+1)f'(\xi)=f(\xi)$。

三、（共 1 题，共计 12 分）

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二次可导，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，且 $f''(x)>0$，则 $f(x)\ge x,\ \forall x\in(-\infty,+\infty)$。

四、(共 1 题，共计 12 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调减少，证明：

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx \ge \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)\,dx$$ 。

五、(共 1 题，共计 14 分)

(1) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(\cos\frac{1}{n})$ 收敛。

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内具有直到三阶的连续导数，且

$f(0)=0,\ \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=0$ ，则级数 $\sum_{n=2}^{\infty} n\,f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛。

六、(共 1 题，共计 12 分)

将直角坐标系下 Laplace 方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 化为极坐标下的形式。

七、(共 1 题，共计 12 分)

讨论含参量反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\sin x\,dx$ 关于 α 分别在 $[\varepsilon,+\infty)$ 和 $(0,+\infty)$ 上的一致收敛性，其中 $\varepsilon>0$ 。

八、(共 1 题，共计 12 分)

证明函数 $f(x)=(1+\frac{1}{1+x})\cos\frac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续。

九、(共 1 题，共计 12 分)

证明：函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2+1}$ 在 $(0,2\pi)$ 内有连续的导函数。

十、(共 1 题，共计 12 分)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且存在非负整数 m，使得

$$\int_a^b x^n f(x)\,dx=0\ \ (n=0,1,\cdots,m)$$,

证明：$f(x)$ 在 (a,b) 内至少有 $m+1$ 个零点。