南京财经大学

2012 年硕士研究生入学考试初试试题（ A 卷）

科目代码： 823 科目名称： 高等代数 满分： 150 分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一（15 分）计算 n 级行列式 $\begin{vmatrix} n & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$，其中 $s_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_n^k$，

$k = 1,2,3\cdots\cdots$.

二（15 分）证明：多项式 $f(x)$，$g(x)$ 的公因式 $d(x)$ 为其最大公因式当且仅当 $d(x)$ 为 $f(x)$，$g(x)$ 的一个组合.

三（20 分）设 A 为 $n\times s$ 阶矩阵，b 为 n 维非零列向量，$r(A)=r$，证明：

（1）$AX=b$ 有 $n-r+1$ 个线性无关的解向量；

（2）$AX=b$ 的任一解均可表示为这 $n-r+1$ 个解向量的线性组合.

四（20 分）若 n 阶矩阵 A 为半正定矩阵，B 为正定矩阵，证明存在数 $u>0$，使得 $|uE+A+B|>|uE+A|$.

五（20 分）设 $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_k \quad (k\ge 2)$，$\tau$ 为线性空间 V 的一个线性变换，对任意 $\alpha\in V$，$\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k \quad (\alpha_i\in V_i)$，定义 $\pi_i: V\to V_i$，$\pi_i(\alpha)=\alpha_i$，证明：$V_i\ (i=1,2,\cdots,k)$ 为 $\tau-$ 不变子空间的充分必要条件是 $\pi_i\tau=\tau\pi_i$.

六（20 分）设 P 为数域，$A\in P^{n\times n}$，$f(x), g(x)\in P[x]$，且 $\left(f(x), g(x)\right)=1$，

$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，$V=\left\{X\in P^n \mid f(A)g(A)X=0\right\}$，$V_1=\left\{X\in P^n \mid f(A)X=0\right\}$，

$V_2=\left\{X\in P^n \mid g(A)X=0\right\}$，证明：$V=V_1\oplus V_2$.

七（20 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3 \quad (b>0)$，若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 矩阵 A 的特征值之和为 1，特征值之积为 -12，求：

（1）a，b 的值；（2）化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准形的正交替换.

八（20 分）已知 A_1,A_2,A_3 均为三阶非零矩阵，$A_i^2=A_i\ (i=1,2,3)$，$A_iA_j=0\ (i\ne j)$，

（1）证明：A_i 的特征值有且仅有 0 和 1；

（2）证明：A_i 的属于特征值 1 的特征向量是 A_j 的属于特征值 0 的特征向量（$i \neq j$）；

（3）若 α_1，α_2，α_3 分别是 A_1, A_2, A_3 属于特征值 1 的特征向量，证明：α_1，α_2，α_3 线性无关.