1999年南京航空航天大学高等代数考研试题

1(15). 对于线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + \lambda x_2 + \beta x_3 - 2x_4 = 0 \\ -2x_1 - \beta x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + \lambda x_4 = 0 \end{cases}$$

λ和β取何整数值时有非零解？并用基础解系表示其通解.

2(20). 利用相似变换将矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

化为对角阵，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$.

3(20). 在R^2中的线性变换T_1和T_2分别定义如下：

$$T_1\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad T_1\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix};\quad T_2\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix},\quad T_2\eta_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\eta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\eta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. 求线性变换$T = T_1T_2$在$\eta_1, \eta_2$下的矩阵.

4(10). 设A, B为n阶方阵，B的特征多项式为$f_B(\lambda)$. 证明：矩阵$f_B(A)$可逆的充分必要条件是A的特征值都不是B的特征值.

5(10). 设A为实对称矩阵，证明：对任何正奇数k，都存在实对称矩阵B使$A=B^k$.

6(10). 设V是Euclid空间，向量$a_1, a_2, \cdots, a_m \in V$. 称

$$G=\begin{vmatrix} (a_1,a_1) & (a_1,a_2) & \cdots & (a_1,a_m) \\ (a_2,a_1) & (a_2,a_2) & \cdots & (a_2,a_m) \\ \cdots & \cdots & & \\ (a_m,a_1) & (a_m,a_2) & \cdots & (a_m,a_m) \end{vmatrix}$$

是$a_1, a_2, \cdots, a_m$的Gram行列式. 证明：当$a_1, a_2, \cdots, a_m$线性相关时$G=0$；当$a_1, a_2, \cdots, a_m$线性无关时$G>0$.

7(15). 多项式$f(x), g(x) \in P[x]$. 证明：

(1). $(f(x), g(x))=1$充分必要条件是$(f(x)g(x), f(x)+g(x))=1$；

(2). 若$\partial(f(x)) \geq 1$, $\partial(g(x)) \geq 1$，则必存在多项式$u(x), v(x) \in P[x]$，且$\partial(u(x)) < \partial(g(x))$, $\partial(v(x)) < \partial(f(x))$使下式成立：

$$(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x).$$

进一步证明：若$(f(x), g(x))=1$，则$u(x)$和$v(x)$是唯一的.