1999 年南京航空航天大学计算方法考研试题

(一)（15 分）i)（7 分）设函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，试写出它在插值基点组 $\{-1,0,1\}$ 上的插值多项式，并用它计算 $x=\pm\frac{1}{2}$ 处之值.

ii（8 分）设 $f(x)\in C^2[a,b]$，证明：

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)-L_1(x)|\le\frac{(b-a)^2}{8}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|$$

其中，$L_1(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的线性插值函数，并举一例，说明上述不等式等号成立.

(二)（15 分）(i)（7 分）试推导数值积分的牛顿－柯特斯公式

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)}f(x_k)+R_n(f)$$

中的系数 $C_k^{(n)}$ 和余项 $R_n(f)$ 表达式.

(ii)（8 分）试用 $n=1,2,3$ 牛顿－柯特斯公式计算定积分

$$I=\int_1^2\frac{1}{x}dx$$

(三)（10 分）给出切比晓夫多项式 $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$，$|x|\le1$

i)（3 分）计算 $\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$

ii)(7 %) 试证明满足递推关系

$$\begin{cases} T_0(x)=1 \\ T_1(x)=x \\ T_{k+1}(x)=2xT_k(x)-T_{k-1}(x),\ k=1,2,\cdots \end{cases}$$

由此给出 $T_2(x), T_3(x), T_4(x)$ 的表达式

四(10 %) 设 $A\vec{x}=\vec{b}$，A非奇，$\vec{b}\neq 0$，给 $\vec{b}$ 一个小扰动 $\delta\vec{b}$，$\vec{x}$ 将得到一个扰动 $\delta\vec{x}$，即有 $\dfrac{\|\delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}\leq\|A\|\cdot\|A^{-1}\|\dfrac{\|\delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}$，试证之，

又若方程组右端 $\vec{b}$ 无扰动，而系数矩阵 A 有扰动 δA，试证这时 $\vec{x}$ 得到的扰动 $\delta\vec{x}$ 满足

$$\frac{\|\delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}+\delta\vec{x}\|}\leq\|A\|\cdot\|A^{-1}\|\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}.$$

五(20 %) i)(10 %) 设求解线性代数方程组

$$A\vec{x}=\vec{b}$$

的迭代程序是 $\begin{cases} \vec{x}^{(k+1)}=G\vec{x}^{(k)}+\vec{g} \\ \vec{x}^{(0)} \end{cases}$

其中 G 是迭代矩阵，$\vec{x}^{(0)}$ 为初始向量，试证若 $\|G\|<1$，则对任意初始向量 $\vec{x}^{(0)}$ 和 $\vec{g}$ 迭代法收敛，且有误差估计

$$\|\vec{x}^{(k)}-\vec{x}^*\|\leq\frac{\|G\|^k}{1-\|G\|}\|\vec{x}^{(1)}-\vec{x}^{(0)}\|$$

其中 $\vec{x}^*$ 为 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的解，$\vec{x}^{(k)}$ 为第 k 次迭代值.

ii)(10 %) 给出线性代数方程组:

$$\begin{cases} x_1+ax_2=b_1 \\ ax_1+x_2+ax_3=b_2 \\ ax_2+x_3=b_3 \end{cases}$$

其中 a 为实参数，试问 a 为何值时简单迭代法收敛.

六（10%）设求解常微分方程初值问题 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=f(x,y) \\ y|_{x=a}=y(a) \end{cases}$ 的数值方法为

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+h\varphi(x_n,y_n,h) \\ y_0 \end{cases}$$

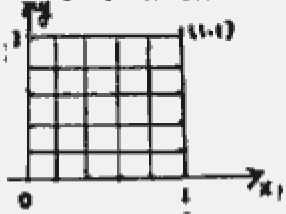
，设 $\varphi(x_n,y_n,h)$ 在 $a\le x\le b,\ 0\le h\le h_0,\ -\infty<y<+\infty$ 上连续，且在该域上关于 y 满足李普希兹（Lipschitz）条件 $|\varphi(x,y,h)-\varphi(x,z,h)|\le L|y-z|$，$L$ 为 Lipschitz 常数，并且，设数值方法局部截断误差定义为 $d_n(h)=y(x_{n+1})-y(x_n)-h\varphi(x_n,y(x_n),h)$，其中 $y(x_n)$ 为微分方程准确解，满足 $|d_n(h)|\le Dh^{k+1}$，D 为常数，$k\ge0$。

试证有下列估计式，当 $L>0$

$$|y(x_{n+1})-y_{n+1}|\le Dh^k\frac{e^{L(b-a)}-1}{L}+e^{L(b-a)}|y(a)-y_0|$$

七（20%）在正方形区域（$0<x<1,\ 0<y<1$）上求拉普拉斯方程第一边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0 & (x,y)\in\Omega \\ u|_{\partial\Omega}=\varphi(x,y) \end{cases}$$



取正方形网格，步长 $h=\frac{1}{N}$，网格区域如图

提示：用五点差分格式逼近拉普拉斯方程边值问题得差分方程

$$\begin{cases} \dfrac{1}{h^2}(U_{i+1,j}+U_{i-1,j}+U_{i,j+1}+U_{i,j-1}-4U_{ij})=f_{ij} & \begin{matrix}1\le i\le N-1\\ 1\le j\le N-1\end{matrix} \\ U_{ij}|_{\text{在正方形边界上}}=\varphi_{ij} \end{cases}$$

试(i)（5%）写出方程组的矩阵形式 $A\vec{U}=\vec{b}$，其中

$\vec{U}=(U_{11},U_{21},\cdots U_{N-1,1},U_{12},\cdots U_{N-1,2},\cdots\ U_{1,N-1},\cdots U_{N-1,N-1})$

(ii)（8%）利用简单迭代法求解，写出格式，确定迭代矩阵特征值，指出简单迭代法收敛速度。

(iii)（7%）用逐次超松弛迭代法求解，写出迭代矩阵，设 ω 是松弛因子，证明逐次超松弛迭代法收敛的必要条件为 $0<\omega<2$。