

## 1999年南京航空航天大学微分几何考研试题

考研加油站收集整理 <http://www.kaoyan.com>

1. 证明曲线  $\vec{r}(t) = \{1+3t+2t^2, 2-2t+5t^2, 1-t^2\}$  是平面曲线。(15')

2. 已知曲线  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ ,  $s$  为弧长参数, 试证明:

$$(1) \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\kappa \tau \quad (2) \vec{\gamma} = -\kappa^2 \vec{\alpha} + \kappa \vec{\beta} + \kappa \tau \vec{\gamma}$$

其中:  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  分别表示曲线的切矢, 主法矢, 副法矢;  $\tau, \kappa$  分别表示挠率和曲率。(15')

3. 已知圆柱螺线  $\Gamma: \vec{r} = \{a \cos \theta, a \sin \theta, b \theta\}$  ( $ab \neq 0$ )

$-\infty < \theta < +\infty$ , 试证明:

(1) 它的切线和  $Z$  轴作固定角

(2) 它的主法线和  $Z$  轴垂直相交

(3) 它的曲率中心轨迹  $\Gamma^*$  仍是圆柱螺线, 且  $\tau \tau^* = \kappa^2$

其中:  $\tau, \kappa$  分别表示  $\Gamma$  的挠率和曲率,  $\tau^*$  表示  $\Gamma^*$  的挠率. (15')

4. 在曲面  $\vec{r} = \{u^2+v^2, u^2-v^2, uv\}$  上点  $P(u=1, v=1)$  处

(1) 计算曲面的主曲率

(2) 求在已知点  $P$  主法截线切线  $PT_1, PT_2$  的方程

(3) 计算在点  $P$  沿曲线  $v = u^2$  切线方向的法截线曲率. (20')

5. 求证由内在方程  $\kappa = \frac{a}{a+s^2}$  和初始条件  $\theta(0)=0, x(0)=0, y(0)=a$  ( $a>0$ ) 决定的相切平面曲线为悬链线  $y = a \cosh \frac{x}{a}$ ,

其中  $\kappa$  为平面曲线的相对曲率. (10')

(注: 内在方程也称作自然方程或禀性方程)

6. 在正螺面  $\Sigma: \vec{r} = \{u \cos v, u \sin v, av\}$  上, ( $a>0$ )

(1) 写出正螺面  $\Sigma$  的第一基本形式

(2) 求曲线  $u+v=0$  与  $u-v=0$  间的夹角  $\varphi$

(3) 证明该正螺面  $\Sigma$  为直纹面, 且是不可展曲面.

(4) 求该正螺面  $\Sigma$  的全曲率和中曲率.

(5) 求该正螺面  $\Sigma$  的曲率线. (20')

7. 证明: 曲面为球面或平面的充要条件是  $H^2 = K$ ,  $H$  表示中曲率,  $K$  表示全曲率. (5')