2000 年南京航空航天大学计算方法考研试题

(一)（15%）给出 $y=f(x)$ 的如下等距结点 x_i 上的函数值表格

$x_i=x_0+ih$	x_0	x_1	x_2	……	x_n
$y_i=f(x_i)$	y_0	y_1	y_2	……	y_n

设 $x^*\in(x_0,x_n)$

(1) 用三点拉格朗日插值公式计算 $y^*=f(x^*)$ 的近似值，试：

a) 给出插值公式.

b) 画出计算框图，用任何一种算法语言描述计算过程

c) 推导出三点拉格朗日插值公式的余项.

ii) 已知

x	0°	30°	45°	60°	75°	90°
$y=\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$	1

用三点拉格朗日插值公式计算 $\sin 50^\circ$ 的近似值，计算插值余项.

(二)(15%) 设 $H_n=span\{1,x,x^2,\cdots x^n\}$

i) 试证：若 $f(x)\in C[a,b]$，则在 H_n 中存在唯一的最佳逼近多项式.

ii) 试证：若 $f(x)\in C[a,b]$，则其最佳逼近多项式 $P_n^*(x)\in H_n$ 就是 $f(x)$ 的一个拉格朗日插值多项式.

iii) 设 $f(x)\in C^2[a,b]$，$f''(x)$ 在 (a,b) 内不变号，试求最佳一次逼近多项式 $P_1(x)=a_0+a_1x$.

(三)(15%) i) 试推导数值积分

$$I=\int_a^b f(x)\,dx$$

的牛顿-柯特斯公式(Newton-Cotes)，从而推导出梯形公式和辛卜生公式

ii) 试证明，当阶为 n，且 n 为偶数，牛顿-柯特斯公式至少有 $n+1$ 次代数精度. 并举一例说明之.

(四)(20分)给出求解常微分方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y|_{x=x_0}=y(x_0)\end{cases}$$

的单步法：$y_{n+1}=y_n+h\varphi(x_n,y_n,h)$，$x_n=x_0+nh$

i) 假设单步法具有p阶精度，且增量函数 $\varphi(x,y,h)$ 关于y满足李普希兹条件

$$|\varphi(x,y,h)-\varphi(x,\bar{y},h)|\le L_\varphi|y-\bar{y}|,$$

设 $y_0=y(x_0)$，试证明上述单步法的整体截断误差为

$$y(x_n)-y_n=O(h^p)$$

ii) 在使用单步法求解常微分方程近似解时，为什么要研究方法的稳定性，试给出稳定性定义。

iii)

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=-100y\\ y|_{x=0}=y_0\end{cases}$$

试用梯形公式给出近似解表达式，并证明当 $h\to 0$ 近似解对初值问题精确解的收敛性。

(五)(15分) 给出边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dx^2}+p(x)\dfrac{dy}{dx}+q(x)y=r(x),\ a<x<b\\ y(a)=\alpha\\ y(b)=\beta\end{cases}$$

把区间 $[a,b]$ N等分，$h=\frac{b-a}{N}$，$x_i=a+ih$，$i=0,1,\cdots N$

用差商近似导数 $(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1})/h^2 \approx \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_i}$

$(y_{i+1}-y_{i-1})/2h \approx \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_i}$

试 i) 写出近似微分方程的差分方程 和推导其截断误差.

ii) 写出求解 $(y_1,y_2,\cdots y_{N-1})$ 的代数方程组

iii) 写出求解方程组的计算框图，用任何一种算法语言描述之.

(六)(20%) i) 试证如果 $\|B\|<1$，则 $I\pm B$ 为非奇异矩阵，且

$\|(I\pm B)^{-1}\|\le\frac{1}{1-\|B\|}$.

其中 $\|\cdot\|$ 是指矩阵的算子范数，I 为单位矩阵.

ii) 若求解 $\vec{x}=B\vec{x}+\vec{f}$ 的迭代格式为 $\vec{x}^{(k+1)}=B\vec{x}^{(k)}+\vec{f}$

试证：对任意初始向量 $\vec{x}^{(0)}$ 及任意 $\vec{f}$，解此方程组 $\vec{x}=B\vec{x}+\vec{f}$ 的迭代格式 $\vec{x}^{(k+1)}=B\vec{x}^{(k)}+\vec{f}$ 收敛的充要条件为：$\rho(B)<1$，$\rho(B)$ 为矩阵B的谱半径.

iii) 如果 $\vec{x}=B\vec{x}+\vec{f}$ 的迭代公式为 $\vec{x}^{(k+1)}=B\vec{x}^{(k)}+\vec{f}$（$\vec{x}^{(0)}$ 为任意初始向量），且迭代矩阵B的某一种范数 $\|B\|_v=q<1$，则

a) 迭代法收敛

b) $\|\vec{x}^{*}-\vec{x}^{(k)}\|_v\le\frac{q}{1-q}\|\vec{x}^{(k)}-\vec{x}^{(k-1)}\|_v$，$\vec{x}^{*}$ 为方程组精确解. 试证之.