2000年南京航空航天大学数学分析考研试题

（一）试求下列极限（共2小题）：

(1) 设 $f(x)$, $g(x)$ 在点 $a(\in R^1)$ 某去心邻域内有定义，且 $f(x)$ 恒不为1．又设当 $x\to a$ 时，$f(x)\longrightarrow 1$ 且 $(f(x)-1)g(x)\longrightarrow A$．试就 A 为有限数，$+\infty$ 或 $-\infty$ 三种情形，计算 $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$．（15分）

(2) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上二次连续可微，$f(0)=f'(0)=0$ 且 $f''(x)>0$．又设 $u(x)$ 表示 $y=f(x)$ 在点 $(x,f(x))$ 的切线在 X 轴上的截距．试求极限

$$\lim_{x\to+0}\frac{xf(u(x))}{u(x)f(x)}$$

（5分）

（二）讨论如下二题：

(1) 设

$$f(x,y,z)=\begin{cases}(|x|^{\alpha}+|y|^{\beta}+|z|^{\gamma})\sin\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}, & x^2+y^2+z^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2+z^2=0\end{cases}$$

试问 α,β,γ 在何范围内，上函数 f 在 $(0,0,0)$ 处可微？（15分）

(2) 讨论Riemann函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}\ (q>0,\ p,q\text{为互质整数}),\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$$

注：为了便于胶印，要求用黑色墨水书写　　南　航

在非无理点处的连续性，如间断，必须指出间断类型。 (5分)

<三> 计算下列各题（共3小题）：

(1) 设 $u=u(x,y)$ 有直至二阶的连续偏导数，且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=x^2y$，$u|_{y=0}=x^2$，$u|_{x=1}=\cos y$，试求 $u(x,y)$。 (17分)

(2) 设 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0$. S是 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=\pm h_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=\pm h_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=\pm h_3 \end{cases}$ $(h_1,h_2,h_3>0)$

所围平行六面体区域Ω的外侧表面，试求

$$I=\iint_S y\,dz\,dx+z\,dx\,dy+x\,dy\,dz.$$ (18分)

(3) 求 $I=\int_C (y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$

其中 C 为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4x \\ x^2+y^2=2x,\ z>0 \end{cases}$，且从Z轴正向看去，C沿逆时针方向。 (13分)

<四> 证明下列各题：

(1) 设数列 $\{a_n\}$ 有界，$k_1,\cdots,k_m$ 是m个固定自然数，$\alpha>m$ 也为常数，且满足：

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha a_n+a_{k_1 n}+a_{k_2 n}+\cdots+a_{k_m n})=0$$

试证明：$\lim_{n\to\infty} a_n=0$. (6分)

(2) 设 $f(x)$ 在有界闭区间 $[A,B]$ 上可积（即R-可积）。试证如下极限等式

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx=0$$

对满足 $A\le a<b\le B$ 的一切 a,b 一致地成立。 (6分)