南京航空航天大学

二〇〇一年硕士研究生入学考试试题

考试科目： 计算方法

说　明：答案一律写在答题纸上

一.(20%)

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义且已知有下表:

x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

其中 $a \le x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n \le b$，试

I) 证明满足 $P(x_i)=y_i$，$(i=0,1,\cdots,n)$ 的插值多项式存在唯一;

II) 给出拉格朗日插值多项式和余项，并证明余项;

III) 由下表

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	2	5	9	16

用三点拉格朗日插值多项式求出 $x=2.3$，$x=2.7$ 时的函数近似值。

二.(15%)

I) 求 a、b，使 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(ax+b-\sin x)^2dx$ 为最小;

II) 试证切比雪夫多项式 $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$，$|x|\le 1$ 的下列重要

性质：a）递推关系，$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$，$(n=1,2,\cdots)$；

b）切比雪夫多项式$\{T_n(x)\}$在区间[-1，1]上带权

$$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ 正交，即有}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \dfrac{\pi}{2} & n=m\neq 0\\ \pi & n=m=0\end{cases}。$$

三．(15%)

Ⅰ)试给出计算定积分$I=\int_a^b f(x)dx$近似值的牛顿-柯特斯公式

$$I_n=(b-a)\sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)}f(x_n)$$

中柯特斯系数$C_k^{(n)}$的计算公式，从而算出$n=1$，$n=2$时的柯特斯系数；

Ⅱ）给出近似计算定积分$I=\int_a^b f(x)dx$的辛卜生公式和积分余项，并证明积分余项；

Ⅲ）给出辛卜生公式的代数精度。

四．(20%)

Ⅰ)用梯形方法解初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}+y=0\\ y(0)=1\end{cases}$$

证明当步长$h\to 0$时，其解收敛于初值问题的精确解；

II）怎样决定常数λ_1、λ_2和P，使求解常微分方程初值问题的 Runge-Kutta 格式

$$y_{n+1} = y_n + h(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2)$$
$$K_1 = f(x_n, y_n)$$
$$K_2 = f(x_{n+p}, y_n + PhK_1)$$

具有二阶精度，并给出两个具体格式。

五.(15%)

给定$C>0$，应用牛顿法解二次方程

$$x^2 - C = 0$$

研究其对任意初值$x_0>0$的收敛性。

六.(15%)

I）试证如果$\|B\|<1$，则$I\pm B$为非奇异矩阵，且$\|(I\pm B)^{-1}\| \le \frac{1}{1-\|B\|}$，其中$\|\cdot\|$为矩阵的算子范数；

II）$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$，计算$A$的各种范数$\|A\|_1$，$\|A\|_\infty$，$\|A\|_2$，$\|A\|_F$。