南京航空航天大学

二〇〇一年硕士研究生入学考试试题

考试科目：　高等代数

说　　明：答案一律写在答题纸上

1（20分）

（1）设 $x^2-2px+2 \mid x^4+3x^2+px+q$，求 p,q 之值；

（2）设 $f(x),g(x),h(x)\in R[x]$，且满足以下等式

$$(x^2+1)h(x)+(x-1)f(x)+(x-2)g(x)=0$$

$$(x^2+1)h(x)+(x+1)f(x)+(x+2)g(x)=0$$

证明：　$x^2+1 \mid f(x)$，$x^2+1 \mid g(x)$

2.（20分）

设 $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

（1）证明：$R^{2\times2}$ 中与 A 可交换的矩阵集合 V 是 $R^{2\times2}$ 的子空间；

（2）求 V 的基和维数；

（3）写出 V 中矩阵的一般形式.

3.（25分）

（1）证明：两个相似矩阵有相同的特征多项式；

（2）已知矩阵 A 与 B 相似，其中

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 2 & x & 2\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}-1 & & \\ & 2 & \\ & & y\end{bmatrix},$$

求x，y之值.

（3） 求矩阵P使$P^{-1}AP=B$；

（4） 若（2）中A是线性变换T在R^3的基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵，求$T$的特征值和相应的特征向量.

4（10分）设A是$m\times n$阶矩阵，秩$(A)=n$，B是n阶方阵，证明:

（1） 若$AB=0$，则$B=0$；

（2） 若$AB=A$，则B是单位矩阵I.

5（10分）设$A^3=2I$，求$B=2A(A-I)(A+2I)$的逆，其中I表示单位阵.

6（10分）设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，证明:

向量组$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}+\alpha_n,\alpha_n+\alpha_1$线性无关的充分必要条件是$n$为奇数.

7（5分）设A是n阶复矩阵，若$A=-A^H$，则称A是反Hermite矩阵，其中上标H表示共轭转置.

证明：反Hermite矩阵的特征值只能是0或纯虚数.