南京航空航天大学

二〇〇一年硕士研究生入学考试试题

考试科目：　常微分方程

说　明：答案一律写在答题纸上

1. 解下列微分方程（每小题8分）

（1）$\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1-2x}{x^2}y-1=0$

（2）$\left[\dfrac{y^2}{(x-y)^2}-\dfrac{1}{x}\right]dx+\left[\dfrac{1}{y}-\dfrac{x^2}{(x-y)^2}\right]dy=0$

（3）$x^2+y'^2=1$

（4）$y''-e^{2y}=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1$

（5）$y'''-3y'-2y=x^3e^{-x}$

2. 用幂级数求解微分方程：$x''-tx'-x=0$　　（10分）

3. 求基本解

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\qquad A=\begin{bmatrix}15&-11&5\\20&-15&8\\8&-7&6\end{bmatrix}$$

（10分）

4. 设$\varphi(x)$在x_0的某邻域中定义，，试证明：$\varphi(x)$是$\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$适合$\varphi(x_0)=y_0$的解当且仅当它是方程

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y)dx$$

的连续解，其中 $f(x,y)$ 在 $x_0-a\le x\le x_0+a$， $y_0-b\le y\le y_0+b$ 上连续。

（要求写出详细的推导过程）　　　　（10 分）

5. 设 $\bar{x}_i(t), i=1,\cdots,n$ 是方程组 $\bar{x}'=A(t)\bar{x}$ 的 n 个线性无关的解，其中 $A(t)$ 是 $n\times n$ 连续矩阵，试证明该方程组的任一解可表示为 $\bar{x}_i(t)$ 的线性组合.（要求写出详细的推导过程）　　　　（10 分）

6. 讨论下列微分方程组的零解（奇点）的稳定性

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x-y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=x-y\end{cases}\qquad\text{（10 分）}$$

7. 设微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f(t,x,y)\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=g(t,x,y)\end{cases}\qquad(7.1)$$

在闭域上满足解的存在唯一性条件，$\varphi(t,x,y)$ 为可微函数，而且对(7.1)的任一解 $x(t)$，$y(t)$，$\varphi(t,x(t),y(t))$ 与 t 无关，试证明在 D 上恒有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+f\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}+g\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0\qquad\text{（10 分）}$$