南京航空航天大学

二〇〇二年硕士研究生入学考试试题

考试科目：微分几何

说　明：答案一律写在答题纸上

1. 证明曲线 $\bar{r}(s)=\{\frac{1}{3}(1+s)^{\frac{3}{2}},\frac{1}{3}(1-s)^{\frac{3}{2}},\frac{s}{\sqrt{2}}\}\ (-1<s<1)$ 以 s 为弧长参数，并求曲线的曲率、挠率和 Frenet 标架.（15 分）

2. 已知曲线 $\bar{r}=\bar{r}(s)$ 的曲率 κ 和挠率 τ，试求沿曲线定义的 向量场 $\bar{\Omega}(s)$，使得以下各式同时成立:

$$\dot{\bar{\alpha}}(s)=\bar{\Omega}\times\bar{\alpha}$$
$$\dot{\bar{\beta}}(s)=\bar{\Omega}\times\bar{\beta}\quad（10 分）$$
$$\dot{\bar{\gamma}}(s)=\bar{\Omega}\times\bar{\gamma}$$

3. 设平面上曳物线的方程为:

$$\bar{r}(\varphi)=\{0, a\cos\varphi, a\ln(\sec\varphi+\tan\varphi)-a\sin\varphi\}\ (0\le\varphi<\frac{\pi}{2})$$

(1) 求 $0\le\varphi<\varphi_0$ $(0<\varphi_0<\frac{\pi}{2})$ 一段的弧长.

(2) 求相对曲率 κ_r.

(3) 将它绕 z 轴旋转一周所得旋转面称为伪球面，写出伪球面的方程.

(4) 求伪球面的全面积.

(5) 证明它有常数 Gauss 曲率 K.(30 分)

4. 证明：螺旋面 $\bar{r}=\{u\cos v, u\sin v, u+v\}$ 与旋转双曲面

$\bar{r}=\{\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,\sqrt{\rho^2-1}\}\ (\rho\ge1, 0\le\theta\le2\pi)$ 之间能够建立保长对应.(8 分)

5. 求曲面 $\bar{r}=\{u,v,u^2+v^2\}$ 在点(1,1)处沿切向量 $d\bar{r}=2\bar{r}_u+\bar{r}_v$ 的法曲率.(10 分)

6. 证明：若曲线上所有点的密切平面都过定点，则它是平面曲线.（7 分）

7. 设 Enneper 曲面:

$$\bar{r}=\{3u(1+v^2)-u^3,3v(1+u^2)-v^3,3(u^2-v^2)\}$$

(1) 求它的第一、第二基本形式.

(2) 证明它是极小曲面.

(3) 求它的曲率线方程，证明它是平面曲线.(20 分)