南京航空航天大学

二〇〇ジ年硕士研究生入学考试试题

考试科目：　计算方法

说　　明：答案一律写在答题纸上

一．(1) 对以下数据表：

x	-0.1	0.1	0.2	0.4	0.7
f(x)	-2	1	2	7	14

适当选取三个节点，建立二次插值多项式计算 f(0.3) 的近似值。

（2）给出：

x	x_0	x_1	x_2
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$
$f'(x)$		$f'(x_1)$	

试求满足条件：$P(x_j)=f(x_j), j=0,1,2, P'(x_1)=f'(x_1)$ 的插值函数。

（15%）

二．设 $f(x)\in C^2[a,b]$，且 $f''(x)$ 在区间 (a,b) 内不变号，试求其最佳一次逼近多项式。

（10%）

三．（1）给出求积分 $I=\int_a^b f(x)dx$ 的插值型求积公式的定义，并给出插值型求积公式的余项。

（2）给出形如 $I_n=\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 的求积公式至少有 n 次代数精度的充要条件，并证明之。

（3）试由牛顿—柯特斯（Newton—Cotes）公式推导出辛卜生(Simpson)公式，并给出辛卜生公式的代数精度和截断误差。（20%）

四.（1）试推导数值解常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 5y \\ y|_{x=0} = 1 \end{cases}$$

的尤拉（Euler）和梯形公式，并证明这两个格式的解对微分方程精确解的收敛性。

（2）设数值解常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

的 Runge-Kutta 型格式为：$y_{n+1} = y_n + h(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2)$。其中：$K_1 = f(x_n, y_n), K_2 = f(x_{n+p}, y_n + phK_1)$，$h$ 为步长，$x_{n+p} = x_0 + (n+p)h$，λ_1, λ_2, p 为待定参数。试推导出为使该格式为二阶精度时 λ_1, λ_2, p 应满足的条件，并给出一组特定的 λ_1, λ_2, p 值。（15%）

五．推导出求解 $f(x) = 0$ 的牛顿法和弦截法的迭代公式，并用这两种方法求出 $\sqrt{2}$ 的近似值。（精确到小数点后两位数字）。（10%）

六.（1）设矩阵 $A \in R^{n \times n}$，$\|\bullet\|$ 为矩阵的算子范数，$\rho(A)$ 为 A 的谱半径，试证：$\rho(A) \le \|A\|$。

（2）如果$\|B\|<1$，试证：$I+B$为非奇异矩阵，且

$\|(I+B)^{-1}\| \le \dfrac{1}{1-\|B\|}$。

（3）设$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$，计算如下范数：$\|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_\infty$.

（15%）

七.（1）设有方程组$\mathbf{x}=\mathbf{B}\mathbf{x}+\mathbf{f}$，对任意的初始向量$\mathbf{x}^{(0)}$及任意的$\mathbf{f}$，解此方程组的迭代公式为$\mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)}+\mathbf{f}$，试给出并证明迭代收敛的充要条件。

（2）设$\mathbf{x}^{(k+1)}=\begin{pmatrix}0.9 & 0\\ 0.3 & 0.8\end{pmatrix}\mathbf{x}^{(k)}+\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$，问该迭代是否收敛？

（15%）