南京航空航天大学

# 二〇〇二年硕士研究生入学考试试题

考试科目：概率论与数理统计

说　明：答案一律写在答题纸上

一. (1)对一大批产品进行抽样检验,逐一抽出检验，一查出废品就立即停止抽样，并认为这批产品不合格。同时还规定如果查到第$n_0$件时仍未发现废品,就认为这批产品合格,并停止抽样.设该批产品的废品率为p( 0<p<1 )。现设所抽出供检验的产品数为$\xi$，求$\xi$的分布律。(6分)

(2)设某随机试验中，事件A发生的概率为$\varepsilon(0<\varepsilon<1)$，证明：不论$\varepsilon$如何小,只要不断地独立重复做此试验,则A至少会发生一次的概率为1。(8分)

二. 在区间[0，1]上独立地任取两个点，求这两个随机点的坐标的平均值的概率密度。(14分)

三. (1)设$A$、$B$为随机试验$E$的两个事件，且$P(A)>0,P(B)>0$,并定义

随机变量 $\xi=\begin{cases}1, & A\text{发生}\\0, & A\text{不发生}\end{cases}$　　$\eta=\begin{cases}1, & B\text{发生}\\0, & B\text{不发生}\end{cases}$

证明：若$\rho_{\xi\eta}=0$，则$\xi$和$\eta$必定相互独立。(9分)

(2)对于任意二维随机变量($\xi,\eta$)，若$\xi$和$\eta$不相关，是否必定有$\xi$和$\eta$相互独立？若结论肯定则证明，否则举出反例。(7分)

四. 设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$为总体$\xi$的一个样本，而$\eta=\ln\xi\sim N(\mu,1)$，试求：$\mu$的极大似然估计量，并讨论该估计量的无偏性和相合性(一致性)。(14分)

五. 将一颗均匀骰子独立重复地掷了 $n$ 次，以 $\eta_n$ 表示 $n$ 次掷出的点数之和。

(1) 问：$n \to \infty$时，$\dfrac{6\eta_n - 21n}{\sqrt{105n}}$ 的极限分布是什么？说明理由。

(2) 要使 $P\{|\dfrac{\eta_n}{n} - 3.5| < 0.1\} \ge 0.9$，至少需要掷多少次？ (15 分)

$\Phi(0.9) = 1.28, \Phi(0.95) = 1.645, \Phi(0.975) = 1.96$

六. 设 $X_i = \dfrac{\theta}{2} t_i^2 + \varepsilon_i$，其中$\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2), i = 1,2,\cdots,n$

且各$\varepsilon_i$相互独立,$\theta$为未知参数.

(1) 求 $\theta$ 的最小二乘估计量 $\hat{\theta}$；

(2) 若 $\sigma^2$ 已知，基于 $\theta$ 的上述估计量 $\hat{\theta}$，求 $\theta$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间；

(3) 若 $\sigma^2$ 未知，检验假设 $H_0: \theta = 0$, $H_1: \theta \ne 0$ (15 分)

七. 设 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，且 $X$ 与 $Y$ 相互独立。令 $Z = X + Y$，

(1) 求给定 $X = x$ 时，$Z$ 的条件密度；

(2) 求给定 $Z = z$ 时，$X$ 的条件密度. (12 分)





二○

1. 证明曲线 $\bar{r}$(

线的曲率、

2. 已知曲线 $\bar{r} =$

下各式同时

3. 设平面上曳物

$\bar{r}(\varphi) = \{0, a\cos$

(1) 求 $0 \le \varphi$

(2) 求相对曲

(3) 将它绕 z 轴

(4) 求伪球面

(5) 证明它有

4. 证明：螺旋面

$\bar{r} = \{\rho\cos\theta,$