

南京航空航天大学

二〇〇二年硕士研究生入学考试试题

考试科目：复变函数

说明：答案一律写在答题纸上

1. 下列方程代表复平面上什么曲线：

$$(1) z = t^2 + \frac{i}{t^2} \quad -\infty < t < +\infty, \quad (2) \operatorname{Im} \frac{1}{z} = 1. \quad (\text{共 10 分})$$

2. (1) 计算 $\operatorname{Ln}(-3+4i)$;

$$(2) \text{证明 } \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2. \quad (\text{共 10 分})$$

3. 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, $|f(z)|$ 恒取常数, 求证 $f(z)$ 恒取常数. (10 分)4. 化成实积分计算 $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{(z-z_0)^n}$, 其中 n 为整数, C 为以 z_0 为中心, ρ 为半径的圆周. (10 分)5. 用柯西积分公式计算 $\int_{|z|=3} \frac{zdz}{(2z+1)(z-2)}$. (10 分)6. 设 $f(z) = \frac{z+1}{2z^2-z-6}$, 求它在区域 $0 < z < \frac{3}{2}$ 中的罗朗级数. (10 分)7. 设 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 证明: z_0 是 $f(z)$ 的 m 级极点当且仅当在 z_0 的某去心邻域内 $f(z)$ 可表示为 $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$, 其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析, $\varphi(z_0) \neq 0$. (10 分)

8. 用残数 (即留数) 计算 $\int_C \frac{z+1}{z^2-2z} dz$, 其中 $C: |z| = 2\frac{1}{2}$. (10 分)

9. 求一个分式线性变换, 把单位圆 $|z| < 1$ 映成上半平面 $\text{Im}(w) > 0$, 且把 0 映为 i , 把 1 映为 -1 . (10 分)

10. 已知 $U(x, y) = x^2 + xy - y^2$, 求解析函数 $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$, 且 $f(i) = -1 + i$. (10 分)