二00三年硕士研究生入学试题

考试科目：《高等代数》

说　明：答案一律写在答题纸上

1（20分）求满足以下条件的三次多项式$f(x)$：

（1）$x-3$整除$f(x)$；

（2）$x+3$除$f(x)$的余数是4；

（3）$x+2$除$f(x)$的余数等于$x-2$除$f(x)$的余数。

2（20分）求矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -7 & -2 & 9 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

的不变因子和初等因子，写出A的Jordan标准形。

3（20分）设由向量

$$a_1=(1,0,2,1)^T,\quad a_2=(2,1,2,3)^T,\quad a_3=(0,1,-2,1)^T$$

张成的子空间为W。求W的正交补$W^{\perp}$的标准正交基。（题中上标T表示转置，下同）。

4（30分）已知$\mathbb{R}^3$的线性变换σ对于基

$$\varepsilon_1=(-1,0,2)^T,\quad \varepsilon_2=(0,1,1)^T,\quad \varepsilon_3=(3,-1,-6)^T$$

的象为$\sigma(\varepsilon_1)=(-1,0,1)^T$，$\sigma(\varepsilon_2)=(0,-1,2)^T$，$\sigma(\varepsilon_3)=(-1,-1,3)^T$，

（1）求σ在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵；

（2）若$x=(1,1,1)^T$，求$\sigma(x)$；

（3）若$\sigma(x)$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的坐标向量为$(2,-4,-2)^T$，求$x$；

（4）证明$\varepsilon_1,\varepsilon_1+\varepsilon_2$，$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$是$\mathbb{R}^3$的基，并求$\sigma$在该基下的矩阵。

5（20分）设$x\in\mathbb{R}^n$，$x\neq 0$，$A=xx^T$。

（1）求A的所有特征值和特征向量；

（2）α为何值时，$I+\alpha xx^T$是正交阵，其中I表示单位阵。

6（20 分）设 $A \in C^{n \times n}$， $f(x), g(x) \in C[x]$， $f(x)$ 的次数大于 0， $g(x)$ 是 A 的最小多项式。证明：

（1）若 $d(x)$ 是 $f(x)$， $g(x)$ 的最大公因式，则
$rank(d(A)) = rank(f(A))$；

（2） $f(A)$ 可逆的充分必要条件是 $f(x)$， $g(x)$ 互质（或互素）。

7（20 分）设 A 和 B 是 n 阶非零实矩阵，且 A 是正定阵， B 是半正定阵。证明：

（1） $A+B$ 是正定阵；

（2） $|I+B| > 1$；

（3）若 B 和 $A-B$ 也是正定阵，则 $B^{-1} - A^{-1}$ 是正定阵。