南京航空航天大学

二OO四年硕士研究生入学考试试题

考试科目： **数学分析**

说　明：答案一律写在答题纸上，写在试卷上无效

1　选择题（将正确答案写在答题纸上，每小题 4 分）

（1）下列函数中不是初等函数的是　（　　）。

A　$\dfrac{\sin x}{x}$，$(x \neq 0)$　　B　$e^{\sin x}$

C　e^{-x^2}　　D　$\int_0^x e^{-t^2}dt$

(2)　下列函数中不能在 $x=0$ 处展成幂级数的是　（　　）。

A　$(1+x)^m$　　B　$\int_0^x \cos t^2 dt$

C　$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$　　D　$\arctan x$

(3)　设 $f(u)$ 与 $\varphi(t)$ 均可微，$F(t)=f(\varphi(t))$，则（　　）是不正确的。

A　$dF = f'(\varphi(t))\,d\varphi(t)$　　B　$dF = df \cdot d\varphi$

C　$F'(t) = f'(\varphi(t))\,\varphi'(t)$　　D　$F'(t) = \dfrac{d}{dt}\left[f(\varphi(t))\right]$

(4)　$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$ 的收敛区间是　（　　）。

A　$\left(-\dfrac{4}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$　　B　$\left(-\dfrac{4}{3}, -\dfrac{2}{3}\right]$

C　$\left[-\dfrac{4}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$　　D　$\left[-\dfrac{4}{3}, -\dfrac{2}{3}\right]$

(5) 设L为$\mathbb{R}^2$中的定向的光滑曲线$\gamma(t)$，$t\in[0,\tau]$，t增加的方向与L的与定向一致，$(\cos\alpha,\cos\beta)$是L的与定向一致的单位切向量，下列式子中正确的是（　　）。

A $\int_L Pdx+Qdy=\pm\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta)\,ds$

B $\int_L Pdx+Qdy=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta)\,ds$

C $\int_L Pdx+Qdy=-\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta)\,ds$

D $\int_L Pdx+Qdy=\pm\int_0^\tau\left[P(\gamma(t))+Q(\gamma(t))\right]dt$

2 计算题（每小题 8 分）

（1）求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}$

（2）已知$f(x)=\begin{cases}x^4\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$　求$f''(0)$.

（3）求和函数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$.

（4）求曲线$\begin{cases}y^2=x\\ xyz=1\end{cases}$在$(1,1,1)$处的法平面方程.

（5）计算$\int\dfrac{\arcsin x}{x^2}dx$

3 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，证明对任何以$a$为极限的数列$x_n$，$x_n\neq a$，有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.（10分）

4 用平面上的有限覆盖定理证明，二元连续函数在有界闭区域上有界.（10分）

5　叙述并证明关于函数列一致收敛的柯西收敛原理.　（10分）

6　用二重积分计算由曲线 $xy=4$，$xy=8$，$xy^3=5$，$xy^3=15$ 围成的平面区域的面积.　（10分）

7　考虑方程组 $\begin{cases} x^2+f(y,z)=0 \\ x^2+y^2-2x=0 \end{cases}$ 的解集 $\Gamma\subset\mathbb{R}^3$，$f(y,z)$ 有连续偏导数。设 $P_0(x_0,y_0,z_0)\in\Gamma$，且 $y_0f_z(y_0,z_0)\neq 0$，求证在 P_0 附近 Γ 可用参数方程表示.　（10分）

8　设 S 为半球面 $x^2+y^2+z^2=4$，$y\geq 0$，方向指向 Y 轴正向，c 为常数，求 $\iint\limits_S c\,dydz+y\,dzdx$.　（10分）

9　将函数 $f(x)$ 展成以 2π 为周期的正弦级数：

$$f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{\pi}{2} & 0<x\leq\dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$$　（10分）

10　证明函数 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.　（10分）

11　证明 $\omega=\left(\dfrac{y}{x}-\dfrac{ey}{x^2}\right)dx+\left(\ln x-1+\dfrac{e}{x}\right)dy$ 在半平面 $x>0$ 上有原函数，并求它的一个原函数.　（10分）