南京航空航天大学

二OO五年硕士研究生入学考试试题

考试科目：　数学分析

说　　明：答案一律写在答题纸上，写在试卷上无效

1　用“$\varepsilon-\delta$”语言叙述函数 $f(x)$ 在区间 I 上非一致连续的定义。　（10 分）

2　写出第 2 类曲面积分的严格定义。　（10 分）

3　叙述二元函数可微的必要条件和可微的充分条件。　（10 分）

4　叙述二元函数的泰勒公式。　（10 分）

5　计算积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.　（10 分）

6　设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，对任何闭区间 I，记

$$J=\{x \mid f(x)\in I\}$$

证明 J 的每个聚点属于 J.　（10 分）

7　设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的可积函数，并在 $x_0\in[a,b]$ 处连续，则 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 x_0 处可导，且 $F'(x_0)=f(x_0)$.　（10 分）

8　求曲线 $\rho=a(1+\cos\theta)$，$a>0$，的曲率及曲率半径。　（10 分）

9　举例说明：由连续函数组成的函数序列如果逐点收敛，其极限函数不必连续。　（10 分）

10 用高斯公式计算

$$\iint_S (x^2-yz)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2-zx)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 S 为 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $z=0, z=1$ 所夹部分的上侧。　（10 分）

11 设 U 为空间中的一个区域，$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 均为 U 上的连续函数。试给出第 2 类曲线积分 $\int_\gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 与路径无关（或 $\oint P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=0$）的一个充要条件，并证明之。

（10 分）

12 设在 $[0,1]$ 上定义的多项式函数列 $\varphi_n(x)$ 具有性质

（1）$\varphi_0(x)=1$，　（2）$\varphi_n'(x)=\varphi_{n-1}(x)$，　（3）$\int_0^1\varphi_n(x)\mathrm{d}x=0$，　$n>0$

试把 $\varphi_2(x)$ 展成富里埃级数。　（10 分）

13 设 $z=z(x,y)$ 定义在区域 $\{(x,y)|x>0\}$ 上，并有连续的 2 阶偏导数。试用极坐标表示 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

（10 分）

14 证明函数 $\Gamma(s)=\int_0^{\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 在其定义域内是连续的。（10 分）

15 下列方程组（未知数是 x,y,u,v,w）是否有解，有多少解，根据什么？

$$\begin{cases} u\cos x - v\sin y + w^2 = 1 \\ \cos(x+y) + v = 1 \end{cases}$$

（10 分）