download.kaoyan.com

南京航空航天大学

二OO五年硕士研究生入学考试试题

考试科目：　高等代数

说　明：答案一律写在答题纸上，写在试卷上无效

1. 设

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\ -4 & -1 & 0 & 0\\ 6 & 1 & 2 & 1\\ -14 & -5 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

（1）求 A 的特征值和特征向量；（10 分）

（2）求 A 的不变因子、初等因子和最小多项式；（15 分）

（3）写出 A 的 Jordan 标准形。（5 分）

2. 本题中 $f(x)$，$g(x)$ 等都是多项式。

（1）设 $a\neq b$，用 $(x-a)$，$(x-b)$ 除 $f(x)$ 的余数分别为 r_1 和 r_2，求用 $(x-a)(x-b)$ 除 $f(x)$ 的余式。（10 分）

（2）证明：若 $(f(x),g(x))=d(x)$，$f(x)\mid h(x)$，$g(x)\mid h(x)$，则 $f(x)g(x)\mid d(x)h(x)$。（10 分）

（3）设 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$，次$(f_1(x))>0$，次$(f_2(x))>0$，且 $(f_1(x),f_2(x))=1$。

证明：若 次$(g(x))<$次$(f(x))$，且 $f_2(x)$ 不整除 $g(x)$，则存在 $u(x)$ 和 $v(x)$，使得

$$u(x)f_1(x)+v(x)f_2(x)=g(x)$$

成立，且满足 次$(u(x))<$次$(f_2(x))$，次$(v(x))<$次$(f_1(x))$。（15 分）

3. 设 $A\in F^{n\times n}$，F 是数域。

（1）证明：所有与 A 可交换的矩阵之集合 $C(A)$ 是 $F^{n\times n}$ 的一个子空间；（5 分）

（2）对于对角阵 $A=diag(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，当诸 a_i 互不相同时求 $C(A)$ 的维数和一组基；（10 分）

（3）若 $n=3$，并设

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

求 $C(A)$ 的维数和一组基。（15 分）

4.（1）设 V_1 和 V_2 是线性空间 V 的两个有限维子空间。证明：若 V_1+V_2 的维数比 $V_1\cap V_2$ 的维数大 1，则 V_1+V_2 必与 V_1，V_2 中一个重合，$V_1\cap V_2$ 必与另一个子空间重合。（15 分）

（2）设 T_1，T_2 是线性空间 V 的两个线性变换，且 $T_1^2=T_1$，$T_2^2=T_2$。证明：$(T_1+T_2)^2=T_1+T_2$ 的充

download.kaoyan.com

分必要条件是：$T_1T_2 = T_2T_1 = 0$。（10分）

5．设 A 是 n 阶实矩阵，其一个特征值为 $\alpha + i\beta\ (\beta \neq 0)$，相应的特征向量为 $x + iy$，其中 $x, y \in R^n$。证明：

（1）x, y 线性无关；（10分）

（2）子空间 $W = span\{x, y\}$ 是 A 的不变子空间；（10分）

（3）若 A 是正交阵，则 $x^T x = y^T y$ 和 $x^T y = 0$。（10分）