南京航空航天大学

二OO六年硕士研究生入学考试试题

考试科目：高等代数

说　　明：答案一律写在答题纸上，写在试卷上无效

一、(1) 求行向量组

$\alpha_1=(1,0,-1,1)$，$\alpha_2=(4,-1,5,6)$，$\alpha_3=(2,-2,34,9)$，$\alpha_4=(4,-5,23,11)$，$\alpha_5=(6,-3,3,9)$

的一个极大无关组，并把其他向量用此极大无关组线性表出。

(2) 求 t 之值使矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & t & -1 & 2\\ 2 & -1 & t & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{pmatrix}$$

的秩最小。(共 25 分)

二、已知线性变换 $\sigma:R^4\to R^4$，在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下矩阵为 A，即 $\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)A$，

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 0 & -1\\ 2 & 5 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix}。$$

(1) 求 σ 在基 $\varepsilon_2,\varepsilon_4,\varepsilon_1,\varepsilon_3$ 下的矩阵。

(2) 求 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3,\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4$ 下的矩阵。(共 25 分)

三、设 A 为 n 阶可逆矩阵，其特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$。

(1) 证明：A 的伴随矩阵 A^* 的特征值是 $\frac{|A|}{\lambda_1},\cdots,\frac{|A|}{\lambda_n}$，而且 A^* 与 A 有相同的特征向量。

(2) 已知

$$A=\begin{pmatrix}7 & -12 & 6\\ 10 & -19 & 10\\ 12 & -24 & 13\end{pmatrix}$$

利用 (1) 的结论求 A^* 的特征值及相应的特征向量。

(3) 对 (2) 中的 A，说明 A^* 是否相似于对角阵？若能，再给出可逆矩阵 U 和对角矩阵 D 使得 $U^{-1}A^*U=D$。(共 25 分)

四、已知n元n个方程的线性方程组：

$$\begin{cases}(a+b)x_1+ax_2+\cdots+ax_n=a\\ax_1+(a+b)x_2+\cdots+ax_n=a\\\cdots\cdots\cdots\\ax_1+ax_2+\cdots+(a+b)x_n=a\end{cases}$$

其中参数a,b不同时为零。

（1）试讨论参数a,b满足什么条件时，上方程组的导出组（或相应齐次线性方程组）只有零解；

（2）当导出组有非零解时，讨论上方程组是否有解？若无解，说明理由；若有解，求导出组的基础解系和上方程组的通解。（共25分）

五、在数域P的多项式环$P[x]$中，$d(x)$整除$f(x)$，$d(x)$整除$g(x)$，$g(x)$与$h(x)$互素，而且$f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)h(x)\neq 0$，证明

（1）$d(x)$是$f(x),g(x)$的最大公因式；

（2）若再加上条件$h(x)$整除$f(x)$，那么$u(x)$与$\dfrac{g(x)}{d(x)}$互素。（共15分）

六、设$A\in C^{n\times n}$（C为复数域），$\alpha,\beta\in C^n$，$\lambda\in C$且A的秩$r(A)=n-1$，证明：矩阵

$$B=\begin{pmatrix}A&\alpha\\\beta^T&\lambda\end{pmatrix}$$

可逆充分必要条件是$\alpha\notin R(A)$和$\beta\notin R(A^T)$，其中$R(A)=AC^n$表示A的值域（象空间）和T表示转置。（共15分）

七、设A,B为n阶方阵且$AB=A+B$，证明

（1）A,B具有相同的可逆性，即A,B同为可逆阵或同为不可逆阵；

（2）$A-I$是可逆阵，并求$A-I$的逆，其中I表示单位矩阵；

（3）A与B可交换，即$AB=BA$。（共10分）

八、设A为n阶实对称阵，证明A可逆当且仅当存在n阶阵B使$AB+B^TA$是正定阵。（共10分）