

南京航空航天大学

二〇〇六年硕士研究生入学考试试题

考试科目: 数学分析

说明: 答案一律写在答题纸上, 写在试卷上无效

1 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n^3}}$ (10 分)

2 设 n 为自然数, 讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 为有理数} \\ x^n, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

的连续性和可导性。 (10 分)

3 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, 且 $f(0) = 0$, $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 试证: $\frac{f(x)}{x}$ 亦在 $(0, +\infty)$ 上单调递减。 (10 分)

4 叙述 n 维空间 R^n 中的聚点原理和有限覆盖定理, 并指出二者的关系。 (10 分)

5 计算不定积分 $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx$, 其中 $a > 0$ 。 (10 分)

6 设 r 为常数, $\Omega = \{(x, y, z) \in R^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$, $f(x, y, z): \Omega \rightarrow R^1$ 为连续函数, 证明 $f(x, y, z)$ 的值域是有界闭区间。 (10 分)

7 设 $f_n(x) = \cos^n x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, 求 $n \rightarrow \infty$ 时 $f_n(x)$ 的极限函数 $f(x)$, 并问收敛在

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是一致的吗? 为什么? 是否有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ (10 分)

8 确定函数 $I(s) = \int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{x^s} dx$ 的连续范围。 (10 分)

311

试题编号 311

32

共 3 页 第 2 页

9 若 $f(x, y, z) = 2x^2 - 3xy^2 - y^2 - 4x - 8y + 3xz - 3z + 5$,

(1) 求出它在点 $(1, -1, 1)$ 处的 Taylor 公式;

(2) 求出该 Taylor 公式中的余项 R_4 ;

(3) $f(x, y, z)$ 在点 $(1, -1, 1)$ 是否取得极值? 是极大值还是极小值? (10 分)

10 设 $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$, $x \in [0, \pi]$,

(1) 将 $f(x)$ 展成正弦级数;

(2) 写出和函数, 作出和函数的草图;

(3) 该级数在 $(0, \pi)$ 是否一致收敛? (10 分)

11 设 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内除点 (x_0, y_0) 外有定义, 举例说明

(1) $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的重极限存在, 但累次极限不存在;

(2) $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的累次极限存在, 但重极限不存在。

并给出一个三者相等的充分条件。 (10 分)

12 设 $u(x, y), v(x, y)$ 在区域 $D \subset R^2$ 有定义, 叙述反函数组存在定理。 (10 分)

13 设 $D \subset R^2$ 为单连通区域, $P(x, y), Q(x, y)$ 及其偏导数在 D 上连续, 试给出 $Pdx + Qdy$ 是某二元函数 $u(x, y)$ 的全微分的一个充要条件, 并证明之。 (10 分)

14 用斯托克斯公式计算曲线积分 $\oint_{L^+} (x-1)dy - (y+1)dx + 2dz$,

其中 L^+ 为上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1; z \geq 0$ 与柱面 $x^2 + y^2 = x$ 的交线, 沿 z 轴从上往下看为逆时针方向。 (10 分)

311

试题编号

311

33

共 3 页 第 3 页

15 设 $u = u(r)$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$, $n \geq 3$, 若 u 满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

试求函数 u 。

(10 分)