南京航空航天大学

二OO六年硕士研究生入学考试试题

考试科目：数学分析

说　　明：答案一律写在答题纸上,写在试卷上无效

1　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^3}}$ （10 分）

2　设 n 为自然数，讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\text{为有理数}\\ x^n, & x\text{为无理数}\end{cases}$$

的连续性和可导性。（10 分）

3　设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $f(0)=0$，$f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，试证：$\dfrac{f(x)}{x}$ 亦在 $(0,+\infty)$ 上单调递减。（10 分）

4　叙述 n 维空间 R^n 中的聚点原理和有限覆盖定理，并指出二者的关系。（10 分）

5　计算不定积分 $\int\sqrt{a^2+x^2}$，其中 $a>0$。（10 分）

6　设 r 为常数，$\Omega=\{(x,y,z)\in R^3;x^2+y^2+z^2\le r^2\}$，$f(x,y,z):\Omega\to R^1$ 为连续函数，证明 $f(x,y,z)$ 的值域是有界闭区间。（10 分）

7　设 $f_n(x)=\cos^n x,\quad 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$，求 $n\to\infty$ 时 $f_n(x)$ 的极限函数 $f(x)$，并问收敛在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上是一致的吗？为什么？是否有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_n(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$ （10 分）

8　确定函数 $I(s)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x^3)}{x^s}\mathrm{d}x$ 的连续范围。（10 分）

9 若 $f(x,y,z)=2x^2-3xy^2-y^2-4x-8y+3xz-3z+5$，

（1） 求出它在点 $(1,-1,1)$ 处的 Taylor 公式；

（2） 求出该 Taylor 公式中的余项 R_4；

（3） $f(x,y,z)$ 在点 $(1,-1,1)$ 是否取得极值？是极大值还是极小值？ （10 分）

10 设 $f(x)=\dfrac{\pi}{2}-x,\ x\in[0,\pi]$，

（1）将 $f(x)$ 展成正弦级数；

（2）写出和函数，作出和函数的草图；

（3）该级数在 $(0,\pi)$ 是否一致收敛？ （10 分）

11 设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内除点 (x_0,y_0) 外有定义，举例说明

（1） $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的重极限存在，但累次极限不存在；

（2） $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的累次极限存在，但重极限不存在。

并给出一个三者相等的充分条件。 （10 分）

12 设 $u(x,y),v(x,y)$ 在区域 $D\subset R^2$ 有定义，叙述反函数组存在定理。 （10 分）

13 设 $D\subset R^2$ 为单连通区域，$P(x,y),Q(x,y)$ 及其偏导数在 D 上连续，试给出 $Pdx+Q\mathrm{d}y$ 是某二元函数 $u(x,y)$ 的全微分的一个充要条件，并证明之。 （10 分）

14 用斯托克斯公式计算曲线积分 $\oint_{L^+}(x-1)dy-(y+1)dx+2dz$，

其中 L^+ 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=1; z\ge 0$ 与柱面 $x^2+y^2=x$ 的交线，沿 z 轴从上往下看为逆时针方向。 （10 分）

15　设 $u=u(r)$, $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$ ，$n\geq 3$，若u满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=0$$

试求函数u。　　（10 分）