南京航空航天大学

二OO七年硕士研究生入学考试试题

考试科目：高等代数

说　　明：答案一律写在答题纸上,写在试卷上无效

一、(共 25 分) 设线性方程组 (1) 和 (2)

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+3x_2+6x_4=0 \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2+3x_3+x_4=0 \end{cases} \quad (2)$$

的解空间分别为 V_1 和 V_2。

1) 求 V_1 和 V_2 的基。

2) 求 V_1+V_2 和 $V_1 \cap V_2$ 的基。

二、(共 25 分) 设不全为零的多项式 $f(x),g(x)$ 的最大公因式为 $d(x)$，即 $d(x)=(f(x),g(x))$。

1) 证明 $d(x)=(f(x),f(x)+g(x))$，

2) 证明 $(\frac{f(x)}{d(x)},\frac{g(x)}{d(x)})=1$。

2) 若 $f(x)$ 无重因式，证明 $(f(x),(f(x)+g(x))^2)=d(x)$。

三、(共 25 分) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为数域 P 上一组线性无关的向量组，$a,b,c\in P$，令 $\beta_1=c\alpha_1+a\alpha_2+a\alpha_3+a\alpha_4$，$\beta_2=b\alpha_1+c\alpha_2+a\alpha_3+a\alpha_4$，$\beta_3=b\alpha_1+b\alpha_2+c\alpha_3+a\alpha_4$，$\beta_4=b\alpha_1+b\alpha_2+b\alpha_3+c\alpha_4$。

1) 当 $a=b$ 时，问 a,b,c 满足什么条件，向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性无关?

2) 在上 1) 条件成立的情况下，写出 α_1 由 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性表出的关系式，并证明两个向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 和 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 等价。

3) 当 $a\neq b$ 时，问 a,b,c 满足什么条件，向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性无关?

四、(共 25 分) 已知实数域上二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+tx_2^2+3x_2^2-4x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3$。

1) 问 t 满足什么条件时，此二次型为正定二次型?

2) 当 t=3 时，用正交变换 X=TY 将上二次型化为标准形，并写出正交变换 X=TY 及二次型的标准形。

3) 在上 2) 情况下，求它的正惯性指数，负惯性指数和规范形。

五、(共 20 分) 设 $V=\{(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Big| \ a_{11}+a_{22}=0\}$ 是迹为 0 的二阶复数域上方阵全体。在通常的矩阵加法和数乘的情况下，已知 V 是实数域 R 上的线性空间。

1) 求 V 在实数域 R 上的一组基和 V 的维数。

2）设$W=\{(a_{ij})\in V \mid a_{12}=-\overline{a_{21}}\}$，其中$\overline{a_{21}}$为$a_{21}$的共轭复数，证明$W$是$V$的子空间，并求出$W$的一组基和$W$的维数。

六、(共 10 分）设n级方阵A满足$A^2+A-2E=0$，其中E为单位矩阵，证明
秩（$A-E$）+秩$(A+2E)=n$。

七、(共 10 分）设A和B为 n 维线性空间V的两个线性变换，$A^{-1}(0)$表示A的核，AV 表示A的值域。若AV 的维数+BV的维数<n。

1）证明$A^{-1}(0)$ I $B^{-1}(0)$的维数>0。

2）证明A和B有公共的特征向量。

八、(共 10 分）设 n 维线性空间 V 的线性变换A的特征多项式为$f(x)$，若$g(x)$和$h(x)$为互素多项式，而且$f(x)\mid g(x)h(x)$。证明$V=V_1\oplus V_2$，其中V_1=$g(A)^{-1}(0)$，V_2=$h(A)^{-1}(0)$。

究生入学考试试题标准答案纸

一、（共 25 分）设线性方程组（1）和（2）

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+3x_2+6x_4=0 \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2+3x_3+x_4=0 \end{cases} \quad (2)$$

的解空间分别为 V_1 和 V_2。

1）求 V_1 和 V_2 的基。

2）求 V_1+V_2 和 $V_1 \cap V_2$ 的基。

解；1）解方程组（1）

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

基础解系为：$\eta_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$。它就是 V_1 的一组基。

解方程组（2）

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

基础解系为：$\eta_3=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\eta_4=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$。它就是 V_2 的一组基。 （10 分）

2）考虑

$$(\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4)=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

从而 η_1,η_2,η_3 为 V_1+V_2 的基。

若 $\gamma \in V_1 \cap V_2$，$\gamma = x_1\eta_1+x_2\eta_2=-x_3\eta_3-x_4\eta_4$，即 $x_1\eta_1+x_2\eta_2+x_3\eta_3+x_4\eta_4=0$。从而一个基础解系

为$\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$。故$\gamma=-\eta_1-\eta_2=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}$为$V_1 \mathrm{I}\ V_2$的一组基。（15 分）

二、（共 25 分）设不全为零的多项式$f(x),g(x)$的最大公因式为$d(x)$，即$d(x)=(f(x),g(x))$。

1）证明$d(x)=(f(x),f(x)+g(x))$，

2）证明$(\dfrac{f(x)}{d(x)},\dfrac{g(x)}{d(x)})=1$。

2）若$f(x)$无重因式，证明$(f(x),(f(x)+g(x))^2)=d(x)$。

证明：1）因为$d(x)=(f(x),g(x))$，则$d(x)\mid f(x),d(x)\mid g(x)$，从而$d(x)\mid f(x),d(x)\mid f(x)+g(x)$。若$h(x)\mid f(x),h(x)\mid f(x)+g(x)$，则$h(x)\mid f(x),h(x)\mid g(x)$，$d(x)=(f(x),g(x))$，从而$h(x)\mid d(x)$。所以$d(x)=(f(x),f(x)+g(x))$。（6 分）

2)因为$(f(x),g(x))=d(x)$，设$f(x)=d(x)f_1(x)$，$g(x)=d(x)g_1(x)$，则$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$，从而$1=u(x)f_1(x)+v(x)g_1(x)$，故$(\dfrac{f(x)}{d(x)},\dfrac{g(x)}{d(x)})=1$。（6 分）

3）因为$f(x)$无重因式，则$(f_1(x),d(x))=1$。因为$(f_1(x),g_1(x))=1$，则$(f_1(x),f_1(x)+g_1(x))=1$，从而$(f_1(x),(f_1(x)+g_1(x))^2)=1$。故$(f_1(x),d(x)(f_1(x)+g_1(x))^2)=1$，从而$(f(x),(f(x)+g(x))^2)=d(x)$。（13 分）

三、（共 25 分）设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为数域$P$上一组线性无关的向量组，$a,b,c\in P$，令$\beta_1=c\alpha_1+a\alpha_2+a\alpha_3+a\alpha_4$，$\beta_2=b\alpha_1+c\alpha_2+a\alpha_3+a\alpha_4$，$\beta_3=b\alpha_1+b\alpha_2+c\alpha_3+a\alpha_4$，$\beta_4=b\alpha_1+b\alpha_2+b\alpha_3+c\alpha_4$。

1）当$a=b$时，问a,b,c满足什么条件，向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性无关？

2）在上 1）条件成立的情况下，写出α_1由$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性表出的关系式，并证明两个向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$和$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$等价。

3）当$a\neq b$时，问a,b,c满足什么条件，向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性无关？

解。考虑线性关系

$$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3+x_4\beta_4=0,$$

由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为数域$P$上一组线性无关，可得到：

$$\begin{cases}cx_1+bx_2+bx_3+bx_4=0\\ax_1+cx_2+bx_3+bx_4=0\\ax_1+ax_2+cx_3+bx_4=0\\ax_1+ax_2+ax_3+cx_4=0\end{cases}\qquad(*)$$

1）当$a=b$时，上式的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} c & a & a & a \\ a & c & a & a \\ a & a & c & a \\ a & a & a & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & a & a & a \\ a-c & c-a & 0 & 0 \\ a-c & 0 & c-a & 0 \\ a-c & 0 & 0 & c-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c+3a & a & a & a \\ 0 & c-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c-a \end{vmatrix} = (c-a)^3(c+3a)$$ 故 当

$(c-a)^3(c+3a)\neq 0$ 时，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性无关。 （8 分）

2）已知 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\alpha_i$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表出，所以 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\alpha_i$ 线性相关，又 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性无关，则 α_i 可由 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性表出，从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性表出，反之亦然。所以他们等价。

设 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3+x_4\beta_4=\alpha_1$.

得到方程组

$$\begin{cases} cx_1+ax_2+ax_3+ax_4=1 \\ ax_1+cx_2+ax_3+ax_4=0 \\ ax_1+ax_2+cx_3+ax_4=0 \\ ax_1+ax_2+ax_3+cx_4=0 \end{cases}$$

$$d_1=\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & c & a & a \\ 0 & a & c & a \\ 0 & a & a & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & a & a \\ a-c & c-a & 0 \\ a-c & 0 & c-a \end{vmatrix} = (c+2a)(c-a)^2,$$

$$d_2=\begin{vmatrix} c & 1 & a & a \\ a & 0 & a & a \\ a & 0 & c & a \\ a & 0 & a & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ a & c-a & 0 \\ a & 0 & c-a \end{vmatrix} = -a(c-a)^2,$$

$$d_3=\begin{vmatrix} c & a & 1 & a \\ a & c & 0 & a \\ a & a & 0 & a \\ a & a & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c-a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ a & 0 & c-a \end{vmatrix} = -a(c-a)^2,\ d_4=\begin{vmatrix} c & a & a & 1 \\ a & c & a & 0 \\ a & a & c & 0 \\ a & a & a & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & c-a & 0 \\ a & 0 & c-a \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a(c-a)^2,$$

故 $x_1=\dfrac{c+2a}{(c+3a)(c-a)}, x_2=-\dfrac{a}{(c+3a)(c-a)}=x_3=x_4$。 （9 分）

3）当 $a\neq b$ 时，(*) 的系数行列式为

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} c & b & b & b \\ a & c & b & b \\ a & a & c & b \\ a & a & a & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(c-a) & b & b & b \\ a & c & b & b \\ a & a & c & b \\ a & a & a & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & c & b & b \\ a & a & c & b \\ a & a & a & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c-a & b & b & b \\ 0 & c & b & b \\ 0 & a & c & b \\ 0 & a & a & c \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ 0 & c-b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & c-b & 0 \\ 0 & a-b & a-b & c-b \end{vmatrix}+(c-a)\Delta_3=a(c-b)^3+(c-a)\Delta_3$$

又 a,b 对称性知，$\Delta_4=b(c-a)^3+(c-b)\Delta_3$，故

$$\Delta_4=\frac{a(c-b)^4-b(c-a)^4}{a-b}。$$

当 $a(c-b)^4\neq b(c-a)^4$ 时，向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性无关。　（8 分）

四、(共 25 分）已知实数域上二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^{\ 2}+tx_2^{\ 2}+3x_2^{\ 2}-4x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3$。

1）问 t 满足什么条件时，此二次型为正定二次型？

2）当 t=3 时，用正交变换 X=TY 将上二次型化为标准形，并写出正交变换 X=TY 及二次型的标准形。

3）在上 2）情况下，求它的正惯性指数，负惯性指数和规范形。

解；1）二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & t & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}。$$

若二次型为正定，则

$$|3|=3>0,\ \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & t \end{vmatrix}=3t-4>0,\begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & t & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{vmatrix}=5t-40>0。$$

故当 $t>8$ 时，二次型正定。　　（5 分）

2）当 $t=3$ 时，

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-3 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda-3 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-3 \end{vmatrix}=(\lambda-5)^2(\lambda+1)$$

当 $\lambda=5$ 时，解方程组 $(\lambda E-A)X=0$

$$5E-A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

基础解系为 $\alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$。

标准正交化$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{-1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，

当$\lambda=-1$时，解方程组$(\lambda E-A)X=0$

$$5E-A=\begin{pmatrix}-4&2&2\\2&-4&2\\2&2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

基础解系为$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\eta_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$。

令$T=(\eta_1\eta_2\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，作正交变换 X=TY 得到标准形

$f(x_1,x_2,x_3)=5y_1^2+5y_2^2-y_3^2$。　（15 分）

而且正惯性指数为 2，负惯性指数为 1，规范形为$f=z_1^2+z_2^2-z_3^2$。　（5 分）

五、（共 20 分）设$V=\{(a_{ij})=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\Bigg|\ a_{11}+a_{22}=0\}$是迹为 0 的二阶复数域上方阵全体。在通常的矩阵加法和数乘条件下，已知V是实数域R上的线性空间。

1）求V在实数域R上的一组基和V的维数；

2）设$W=\{(a_{ij})\in V\mid a_{12}=-\overline{a_{21}}\}$，其中$\overline{a_{21}}$为$a_{21}$的共轭复数，证明$W$是$V$的子空间，并求出$W$的一组基和$W$的维数。

证明：1）$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&i\\0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0\\i&0\end{pmatrix}$为$V$的一组基，

而且 dimV=6。（7 分）

3 ）　$\forall A=(a_{ij}),B=(b_{ij})\in W$　，　$r\in R$　，　$(a_{11}+b_{11})+(a_{22}+b_{22})=0,ra_{11}+ra_{22}=0$　，$a_{12}+b_{12}=-\overline{a_{12}+b_{12}}$，故$rA,A+B\in W$。从而 W 是 V 的子空间。　（6 分）

而且它的一组基为$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}$而且 dimV=4。　（7 分）

六、（共 10 分）设n级方阵A满足$A^2+A-2E=0$，其中E为单位矩阵，证明

秩（A-E）+秩（A+2E）=n。

证明：因为$A^2+A-2E=0$，所以$(A+2E)(A-E)=0$，则

$r(A+2E)+r(A-E)\le n$。（5 分）

又$r(A+2E)+r(A-E)\ge r(A+2E-(A-E))=n$。

所以*秩（A-E）+秩（A-2E）=n*。（5 分）

七、（共 10 分）设A和B为 n 维线性空间V的两个线性变换，$A^{-1}(0)$表示A的核，AV 表示A的值域。若AV 的维数+BV的维数<n。

1）证明$A^{-1}(0)\cap B^{-1}(0)$的维数>0。

2）证明A和B有公共的特征向量。

证明：因为 dim$A$V+dim$A^{-1}(0)$=n，dim$B$V+dim$B^{-1}(0)$=n，而且AV 的维数+BV的维数<n，

所以 dim$A^{-1}(0)$+dim$B^{-1}(0)$>n。

又 n< dim$A^{-1}(0)$+dim$B^{-1}(0)$=dim$A^{-1}(0)\cap B^{-1}(0)$+dim$(A^{-1}(0)+B^{-1}(0))$，

所以 dim$A^{-1}(0)\cap B^{-1}(0)$>0。　（7 分）

2）因为 dim$A^{-1}(0)\cap B^{-1}(0)$>0，所以$\exists 0\neq\eta\in A^{-1}(0)\cap B^{-1}(0)$，从而$A\eta=B\eta=0=0\eta$。　（3 分）

八、（共 10 分）设 n 维线性空间 V 的线性变换A的特征多项式为$f(x)$，若$g(x)$和$h(x)$为互素多项式，而且$f(x)\mid g(x)h(x)$。证明$V=V_1\oplus V_2$，其中$V_1=g(A)^{-1}(0)$，$V_2=h(A)^{-1}(0)$。

证明：因为线性变换A的特征多项式为 f(x)，所以 f(A)=0，又$f(x)|g(x)h(x)$，从而 g(A)h(A)=$\boldsymbol{0}$。

因为(g(x),h(x))=1，所以存在 u(x),v(x)，使得 u(x)g(x)+v(x)h(x)=1，从而 u(A)g(A)+v(A)h(A)=E。

$\forall\alpha\in V$，$\alpha=E\alpha=$ u(A)g($\mathbf{A}$)α+v(A)h($\mathbf{A}$)α，其中 v(A)g($\mathbf{A}$)$\alpha\in V_2$，u(A)h($\mathbf{A}$)$\alpha\in V_1$，故$V=V_1+V_2$。　（6 分）

又$\beta\in V_1\cap V_2$，则$\beta=E\beta=$ v(A)g($\mathbf{A}$)β+v(A)h($\mathbf{A}$)β=0，故$V_1\cap V_2=0$。所以$V=V_1\oplus V_2$。　（4 分）