南京航空航天大学
二〇〇八年硕士研究生入学考试试题

考试科目：高等代数

说　　明：所有试题答案必须写在答题纸上，答案写在试卷上无效

一、已知 A,B 是同阶矩阵，且 $AB=E-A-B$，其中 E 表示与 A,B 同阶的单位矩阵，

1．证明 $E+B$ 可逆，并求 $(E+B)^{-1}$；（10分）

2．若 $A^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&1\end{pmatrix}$，其中 A^* 表示 A 的伴随矩阵，求矩阵 B．（10分）

二、已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 有特征值 λ，$x=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是对应的特征向量，

1．求 a,b,λ 的值；（10分）

2．问 A 能否与对角矩阵相似，并说明理由？（10分）

三、设有齐次线性方程组

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases}2x_1+3x_2+x_3+2x_4=0\\ x_1-x_3+ax_4=0\end{cases}$$

和

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{cases}x_1+3x_2+2x_3+x_4=0\\ x_1+bx_2+x_3+x_4=0\end{cases}$$

试确定参数 a 和 b，使得方程组(I)和(II)同解，并求它们的通解．（20分）

四、设 $A=\begin{pmatrix}2&6&-15\\1&1&-5\\1&2&-6\end{pmatrix}$，

1．求矩阵 A 的所有不变因子和初等因子；（15分）

2．求 A 的 Jordan 标准形．（5分）

五、设$V=\{A\in R^{2\times2}\mid A^T=A\}$，其中$R^{2\times2}$表示由全体2阶实矩阵按照矩阵的加法和数乘运算形成的线性空间，A^T 表示矩阵A的转置，

1．证明V是$R^{2\times2}$的子空间；（5分）

2．求V的维数和一组基；（5分）

3．在V中定义映射T如下：

$$T(A)=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix},\quad A\in V$$

证明T是V上的线性变换,并求T在题2中所取基下的矩阵．（1 0分）

六、已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\ 2}+ax_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+2bx_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$$

经正交变换$X=QY$可化为标准形$f=y_2^{\ 2}+4y_3^{\ 2}$，求a,b的值和正交矩阵Q．（2 0分）

七、设A是数域P上的n阶矩阵，$\varphi(\lambda)$是数域P上的多项式，如果$\varphi(A)=0$，则称$\varphi(\lambda)$是A的化零多项式．在A的所有化零多项式中，次数最低的首项系数为1的多项式称为A的最小多项式，记为$m_A(\lambda)$．证明：

1．如果$\varphi(\lambda)$是A的任一化零多项式，则$m_A(\lambda)\mid\varphi(\lambda)$；（5分）

2． A的最小多项式唯一；（5分）

3．若$A=\begin{pmatrix}B&0\\0&C\end{pmatrix}$，其中$B,C$是数域P上的方阵，则

$$m_A(\lambda)=\frac{m_B(\lambda)m_C(\lambda)}{(m_B(\lambda),m_C(\lambda))},$$

其中$(m_B(\lambda),m_C(\lambda))$表示$m_B(\lambda)$和$m_C(\lambda)$的首项系数为1的最大公因式．（1 0分）

八、设A,B都是n阶正定矩阵，证明：

1． $|E+A|>1$，其中E是n阶单位矩阵；（5分）

2． $|A+B|>|A|$．（5分）

南京航空航天大学

二〇〇八年硕士研究生入学考试试题参考答案

考试科目：高等代数

一、1. 原方程变形为$(E+A)(E+B)=2E$，所以$E+B$可逆，$(E+B)^{-1}=\frac{1}{2}(E+A)$.（10分）

2. $A=|A|(A^*)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&3&0&1\end{pmatrix}$，$B=2(E+A)^{-1}-E=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\\frac{1}{2}&0&0&0\\0&-\frac{3}{2}&0&0\end{pmatrix}$.（10分）

二、1. $\lambda=-1, a=-3, b=0$.（10分）

2. 由于$|\lambda E-A|=(\lambda+1)^3$而$-E-A$的秩为2，所以$A$不能与对角矩阵相似.（10分）

三、$a=1, b=2$.（10分）

通解为

$$x=c_1(1,-1,1,0)^T+c_2(-1,0,0,1)^T$$

其中c_1,c_2是任意常数.（10分）

四、1. 不变因子：$d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=\lambda+1, d_3(\lambda)=(\lambda+1)^2$，初等因子：$\lambda+1,(\lambda+1)^2$.（15分）

2. Jordan标准形：$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.（5分）

五、1. 直接验证V对矩阵的加法和数乘运算封闭.（5分）

2. 维数为3，一组基：$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$.（5分）

3. T在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵是$A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&2&-2\\0&0&4\end{pmatrix}$.（10分）

六、$a=3, b=1, Q=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.（20分）

七、1. 如果$m_A(\lambda)$不能整除$\varphi(\lambda)$，则存在多项式$q(\lambda)$和$r(\lambda)$，使得

$$\varphi(\lambda)=q(\lambda)m_A(\lambda)+r(\lambda),\quad \partial(r(\lambda))<\partial(m_A(\lambda))$$

从而$r(A)=\varphi(A)-q(A)m_A(A)=0$，与$m_A(\lambda)$是最小多项式相矛盾.（8分）

2. 如果$m_1(\lambda)$和$m_2(\lambda)$都是A的最小多项式，则由1的结论，有$m_1(\lambda)\mid m_2(\lambda), m_2(\lambda)\mid m_1(\lambda)$，从而$m_1(\lambda)=m_2(\lambda)$.（7分）

3. 记$f(\lambda)=\dfrac{m_B(\lambda)m_C(\lambda)}{(m_B(\lambda),m_C(\lambda))}$，由于$m_A(B)=m_A(C)=0$，所以$f(\lambda)\mid m_A(\lambda)$. 由于$f(A)=0$，所以$m_A(\lambda)\mid f(\lambda)$，从而$m_A(\lambda)=f(\lambda)$.（5分）

七、1. 因为A正定，所以A的特征值是$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$均为正数，于是

$$|E+A|=(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\cdots(1+\lambda_n)>1.\text{（5分）}$$

2. 因为A正定，所以存在可逆矩阵P，使得$A=P^TP$. 记$Q=P^{-1}$，则

$$|A+B|=|P^TP+B|=|P^T(E+Q^TBQ)P|=|A||E+Q^TBQ|$$

由1的结论$|A+B|>|A|$.（5分）