南京航空航天大学
二〇〇八年硕士研究生入学考试试题

考试科目：…… 量 子 力 学

说　　明：所有试题答案必须写在答题纸上，答案写在试卷上无效

一.（三小题各 10 分）

（1）证明在 L^2 和 L_z 的共同本征态下，平均值 $\overline{L_x}=0$.

（2）已知氢原子处在 $\Psi_{21-1}(r,\theta,\varphi)$ 态下，求电子出现概率最大的角度方向.

波函数 $\Psi_{21-1}=R_{21}(r)Y_{1-1}(\theta,\varphi)=(\frac{z}{2a_0})^{\frac{3}{2}}\frac{zr}{a_0\sqrt{3}}\exp(-\frac{zr}{2a_0})\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\varphi}$.

（3）两个互作用可以忽略的电子在一维线性谐振子势场中运动，写出系统基态和第一激发态的总波函数.

二.

一粒子在一维有限深势阱中运动，$U(x)=\begin{cases}\infty & x\le 0\\ -V_0 & x\in(0,a)\\ 0 & x\ge a\end{cases}$， 求确定束缚态能级的方程.

（30 分）

三.

一维运动粒子的状态是 $\Psi(x)=\begin{cases}Axe^{-\lambda x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$，其中 $\lambda>0$，求：(1) 粒子动量的几率分布函数; (2)粒子的平均动量.　　（30 分）

四.

对于自旋 $\frac{\hbar}{2}$ 的体系，求 $\sigma_x+\sigma_y$ 的本征值和本征态，并在较小的本征值对应的本征态中，求测量 S_y 得 $\frac{\hbar}{2}$ 的概率和 S_x 的平均值.　　（20 分）

五.（在两小题中选做一题，多做不加分）

（1）空间转子的转动惯量为 I，电偶极矩为 $\vec{D}$，受到外电场 $\vec{\varepsilon}$ 微扰作用：$H' = \begin{cases} 0, t < 0 \\ -\vec{D}\cdot\vec{\varepsilon} e^{-t/\tau}, t \geq 0 \end{cases}$，其中，$\tau$ 为常量. 设 $t=0$ 时转子处在基态，求经过相当长时间后转子处于激发态的概率.　　　　（20 分）

（2）自旋在 (θ,φ) 方向的粒子，磁矩为 $\vec{\mu}_M$，置于沿 z 方向的磁场 $\vec{B}$ 中，写出其哈密顿量，并求其概率幅与时间的关系.　　　　（20 分）

六.

设电子在均匀磁场 $(0,0,B)$ 中运动，其哈密顿算符为

$\hat{H} = \dfrac{eB}{2\mu}\hat{L}_z$，试建立 $\dfrac{d\overline{L_x}}{dt}$，$\dfrac{d\overline{L_y}}{dt}$ 和 $\dfrac{d\overline{L_z}}{dt}$ 所满足的运动方程，进而解出 $\overline{L_x(t)}$，$\overline{L_y(t)}$ 和 $\overline{L_z(t)}$. 已知 $t=0$ 时，$\overline{L_x} = c_1$，$\overline{L_y} = 0$，$\overline{L_z} = c_2$.　　　　（20 分）

南京航空航天大学

二〇〇八年硕士研究生入学考试试题参考答案

考试科目：…… 量子力学

一.

(1) 证明: (10′)

L^2与L_z算符的共同本征态为$Y_{lm}(\theta,\varphi)$，平均值

$$\bar{L}_x=\int Y_{lm}^*\hat{L}_x Y_{lm}\,d\Omega=\frac{1}{i\hbar}\int Y_{lm}^*(L_yL_z-L_zL_y)Y_{lm}\,d\Omega$$

$$=\frac{1}{i\hbar}\left[\bar{L}_y m\hbar-\int (L_zY_{lm})^*L_yY_{lm}\,d\Omega\right]=\frac{m}{i}(\bar{L}_y-\bar{L}_y)=0$$

得证.

(2) 只需考虑波函数$\psi_{21-1}(r,\theta,\varphi)$的角向部份: (10′)

$w_{1-1}(\theta,\varphi)=|Y_{1-1}(\theta,\varphi)|^2=\frac{3}{8\pi}\sin^2\theta$，令$\frac{dw}{d\theta}=0$，得

$\theta=0$，和π，φ角任意.

(3) 单电子波函数的空间部分: $\psi_0(x)=N_0e^{-\frac{1}{2}\alpha^2x^2}$, $\alpha=\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}$

$\psi_1=N_1e^{-\frac{1}{2}\alpha^2x^2}H_1(\alpha x)$, $N_n=\sqrt{\frac{\alpha}{2^n n!\sqrt{\pi}}}$. (10′)

二电子总波函数应为反对称的:

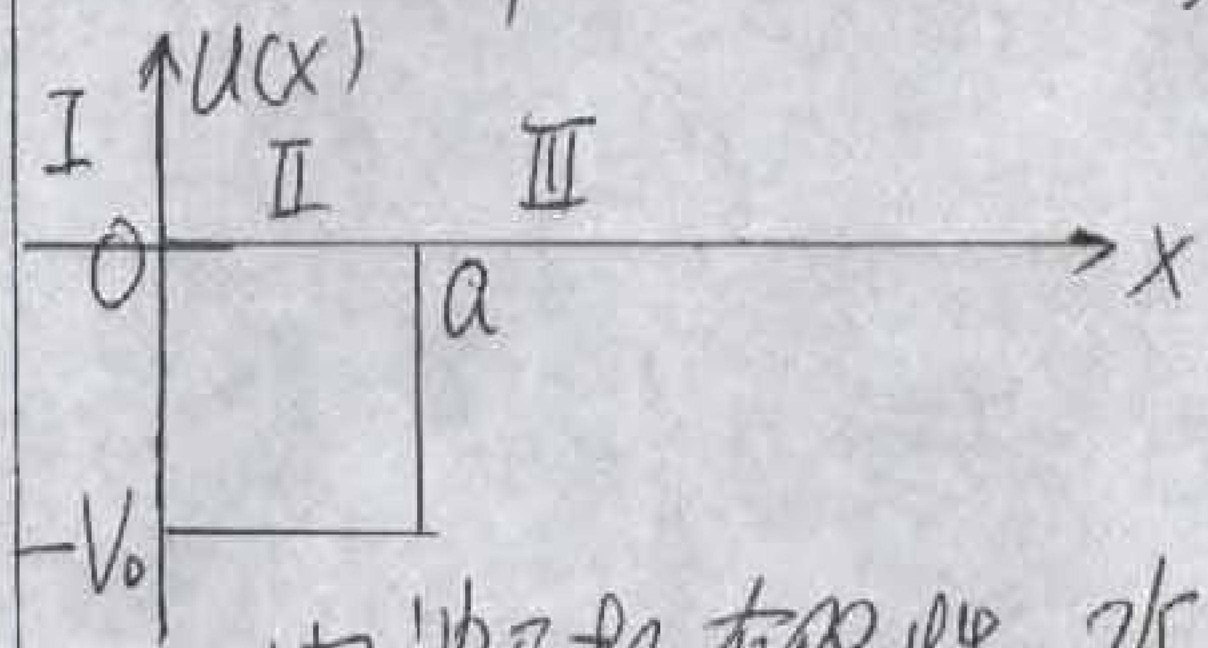
基态 $\psi_{00}(q_1,q_2)=\psi_0(x_1)\psi_0(x_2)\frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha(1)\beta(2)-\alpha(2)\beta(1)]$

第一激发态: $\psi_{10}(q_1,q_2)=\frac{1}{2}[\psi_0(x_1)\psi_1(x_2)+\psi_1(x_1)\psi_0(x_2)]\times[\alpha(1)\beta(2)-\alpha(2)\beta(1)]$

和 $\psi_{10}(q_1,q_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_0(x_1)\psi_1(x_2)-\psi_1(x_1)\psi_0(x_2)]\times\begin{cases}\alpha(1)\alpha(2)\\ \beta(1)\beta(2)\\ \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha(1)\beta(2)-\alpha(2)\beta(1)]\end{cases}$

二、解：

定态薛定谔方程：$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2}+U(x)\right]\psi(x)=E\psi(x)$.



$$U(x)=\begin{cases}\infty & \text{I 区}\\ -V_0 & \text{II 区}\\ 0 & \text{III 区}\end{cases}$$

由波函数有限性：$\psi_I=0$.　束缚态，$E<0$

$\psi_{II}''(x)+\frac{2\mu}{\hbar^2}(E+V_0)\psi_{II}(x)=0$,　且 $E>-V_0$, $(E+V_0)>0$

令 $\frac{2\mu(E+V_0)}{\hbar^2}=k^2$，则 $\psi_{II}=A\sin kx+B\cos kx$.

由连续性条件，$\psi_I(0)=\psi_{II}(0)$，$\therefore B=0$, $\psi_{II}=A\sin kx$.

$\psi_{III}''(x)+\frac{2\mu}{\hbar^2}E\psi_{III}(x)=0$, $\because E<0$, 令 $\alpha^2=\frac{2\mu|E|}{\hbar^2}$,

$\psi_{III}''(x)-\alpha^2\psi_{III}=0$, $\psi_{III}=Ce^{\alpha x}+De^{-\alpha x}$,

由束缚态条件 $\psi(x\to\infty)=0$，有 $C=0$, $\psi_{III}=De^{-\alpha x}$.

利用 $x=a$ 处的连续性条件：

$[\ln\psi_{II}(x)]'_{x=a}=[\ln\psi_{III}(x)]'_{x=a}$,　$\frac{Ak\cos ka}{A\sin ka}=\frac{-D\alpha e^{-\alpha a}}{De^{-\alpha a}}$

$\therefore k\cot ka=-\alpha$，即为确定束缚态能级的方程.

三. 解：

先将波函数归一化，$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2dx=0$，利用 $\int_0^{\infty}e^{-ax}x^n dx=\frac{n!}{a^{n+1}}$，

$\int_0^{\infty}A^2x^2e^{-2\lambda x}dx=1$，有 $A=2\lambda^{3/2}$

(1) $\psi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}c(p)\psi_p(x)dp$，$c(p)=\int_0^{\infty}\psi_p^*(x)\psi(x)dx$

$\psi_p^*=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-\frac{i}{\hbar}px}$

$\therefore c(p)=\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-\frac{i}{\hbar}px}2\lambda^{3/2}xe^{-\lambda x}dx$

$=\frac{(2\lambda^3)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi\hbar}}\int_0^{\infty}e^{-(\frac{i}{\hbar}p+\lambda)x}x\,dx=\sqrt{\frac{2\lambda^3}{\pi\hbar}}\frac{1}{(\frac{i}{\hbar}p+\lambda)^2}$

$\therefore$ 动量几率分布函数 $|c_p|^2dp=\frac{2\lambda^3}{\pi\hbar}\frac{1}{(\frac{p^2}{\hbar^2}+\lambda^2)^2}$

(2) $\bar{p}=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\hat{p}\psi(x)dx=-i\hbar\int_0^{\infty}xe^{-\lambda x}\frac{d}{dx}(xe^{-\lambda x})dx$

$=0$

或 $\bar{p}=\int_{-\infty}^{\infty}|c_p|^2p\,dp=0$ （奇函数积分）

四. 解：

$\sigma_x+\sigma_y=\begin{pmatrix}0 & 1-i\\ 1+i & 0\end{pmatrix}$，设本征态 $\chi=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 本征值为λ，则

$\begin{pmatrix}0 & 1-i\\ 1+i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$，$\det\begin{vmatrix}-\lambda & 1-i\\ 1+i & -\lambda\end{vmatrix}=0$

$\lambda^2-(1+i)(1-i)=0$，$\lambda^2-2=0$。$\lambda=\pm\sqrt{2}$

将 $\lambda=+\sqrt{2}$ 代回原方程：$-\lambda a+(1-i)b=0$，$a=\frac{1-i}{\sqrt{2}}b$，

$|a|^2+|b|^2=1$，即 $\frac{2}{2}|b|^2+|b|^2=1$，$\therefore b=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$a=1-i$

$\therefore \chi_1=\begin{pmatrix}(1-i)/2\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-i\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$，$\lambda=\sqrt{2}$，

同样步骤得：$\chi_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-i\\ -\sqrt{2}\end{pmatrix}$，$\lambda=-\sqrt{2}$.

$S_y=\frac{\hbar}{2}$ 的本征态 $\chi_{y+}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$，$\therefore$ 在 χ_2 态中测得 $S_y=\frac{\hbar}{2}$

的几率：$w_{+y}=|\chi_{y+}^{+}\chi_2|^2=\left|\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-i)\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-i\\ -\sqrt{2}\end{pmatrix}\right|^2$

$=\frac{1}{8}|1+(\sqrt{2}-1)i|^2=\frac{1}{8}\{4-2\sqrt{2}]=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

$\overline{S_x}=\chi_2^{+}\frac{\hbar}{2}\sigma_x\chi_2=\frac{1}{2}(1+i,-\sqrt{2})\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-i\\ -\sqrt{2}\end{pmatrix}=-2\sqrt{2}$

五、（两题选做一题）

(1) 初态 $\psi_k = Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$，以 $\vec{\varepsilon}$ 方向为 z 轴方向，则

$H' = -D\varepsilon\cos\theta\, e^{-t/\tau}$，$(t \geq 0)$

末态几率幅 $a_m = \frac{1}{i\hbar}\int_0^t H'_{mk} e^{i\omega_{mk}t'}dt'$，$\omega_{mk} = \frac{E_m - E_k}{\hbar}$.

其中 $H'_{mk} = \int \psi_m^* H'(t)\psi_k d\tau$，由 $\cos\theta Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{3}}Y_{10}$

和 $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ 的正交归一性，$\psi_m = Y_{10}$.

$\therefore H'_{mk} = H'_{10,00} = (-D\varepsilon)e^{-t/\tau}\int Y_{lm}^* \cos\theta\, Y_{00} d\Omega = \frac{-D\varepsilon e^{-t/\tau}}{\sqrt{3}}$.

$$a_m = a_{10} = \frac{1}{i\hbar}\int_0^t \frac{-D\varepsilon}{\sqrt{3}} e^{-t/\tau} e^{i\omega_{mk}t'}dt' = \frac{-D\varepsilon}{\sqrt{3}\, i\hbar}\frac{e^{i\omega_{mk}t - \frac{t}{\tau}} - 1}{i\omega_{mk} - \frac{1}{\tau}}$$

长时间后即 $t \to \infty$，$a_m(t\to\infty) = \frac{D\varepsilon}{\sqrt{3}\hbar}\frac{1}{-\omega_{mk} - \frac{i}{\tau}}$

处在激发态 Y_{10} 的几率：

$$W_{k\to m} = |a_m|^2 = \frac{D^2\varepsilon^2}{3\hbar^2}\frac{1}{\omega_{10}^2 + \frac{1}{\tau^2}},$$

其中 $\omega_{10} = \frac{E_1 - E_0}{\hbar} = \frac{1}{\hbar}\frac{2\hbar^2}{2I} = \frac{\hbar}{I}$.

4.2 拉莫旋进

五(2)现在将上述自旋在(θ,φ)方向的粒子（譬如电子）置于沿 z 方向的磁场 $\mathscr{B}$ 中观察其概率幅的变化。这时的哈密顿矩阵为[1]

$$H=-\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{M}}\cdot\mathscr{B}\sigma_z=\mu_{\mathrm{M}}\mathscr{B}\sigma_z=\begin{pmatrix}\mu_{\mathrm{M}}\mathscr{B} & 0\\ 0 & -\mu_{\mathrm{M}}\mathscr{B}\end{pmatrix},\tag{2.79}$$

式中 $\sigma_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ 是泡利矩阵，μ_{M} 为粒子的磁矩。从而薛定谔方程为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}C_\uparrow\\ C_\downarrow\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_{\mathrm{M}}\mathscr{B} & 0\\ 0 & -\mu_{\mathrm{M}}\mathscr{B}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}C_\uparrow\\ C_\downarrow\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases}\mathrm{i}\hbar\dfrac{\partial C_\uparrow}{\partial t}=\mu_{\mathrm{M}}\mathscr{B}C_\uparrow,\\[2mm] \mathrm{i}\hbar\dfrac{\partial C_\downarrow}{\partial t}=-\mu_{\mathrm{M}}\mathscr{B}C_\downarrow.\end{cases}\tag{2.80}$$

[1] 电子负电，从而自旋磁矩 $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{M}}$ 与角动量 $\boldsymbol{s}$ 的方向相反。当自旋角动量和磁场同沿 z 方向时，磁矩沿 $-z$ 方向。

积分后得

$$\begin{cases}C_\uparrow(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu_{\mathrm{M}}\mathscr{B}t/\hbar}C_\uparrow(0),\\ C_\downarrow(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu_{\mathrm{M}}\mathscr{B}t/\hbar}C_\downarrow(0).\end{cases}$$

取 $t=0$ 时刻的初始条件为

$$\begin{pmatrix}C_\uparrow(0)\\ C_\downarrow(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\theta}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2}\\ -\sin\dfrac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2}\end{pmatrix},$$

则

$$\begin{pmatrix}C_\uparrow(t)\\ C_\downarrow(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\theta}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi+\omega_{\mathrm{L}}t)/2}\\ -\sin\dfrac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\omega_{\mathrm{L}}t)/2}\end{pmatrix}.\tag{2.81}$$

式中

$$\omega_{\mathrm{L}}=\frac{2\mu_{\mathrm{M}}\mathscr{B}}{\hbar}.\tag{2.82}$$

图 2-15 自旋磁矩的拉莫旋进

由上式可以看出，粒子的自旋矢量始终与极轴保持固定的夹角 θ，但以角速度 ω_{L} 围绕极轴转动（见图2-15），ω_{L} 相当于经典电磁学中磁偶极子在外磁场中拉莫旋进的角速度。[2]

4.3 磁共振

六.

解　为简捷起见，令

$$\omega = \frac{eB}{2\mu c} \tag{1}$$

由定义知

$$\frac{\mathrm{d}\overline{L_x}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\overline{[L_x,\hat{H}]} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\overline{[L_x,\omega\hat{L}_z]} = -\omega\overline{L_y} \tag{2}$$

同理可知

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\overline{L_y}}{\mathrm{d}t} &= \omega\overline{L_x}\\ \frac{\mathrm{d}\overline{L_z}}{\mathrm{d}t} &= 0\end{aligned} \tag{3}$$

由 $\hat{L}_+ = \hat{L}_x + \mathrm{i}\hat{L}_y$ 知，$\overline{L_+} = \overline{L_x} + \mathrm{i}\,\overline{L_y}$，进而得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{L_+} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{L_x} + \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{L_y} = -\omega\overline{L_y} + \mathrm{i}\omega\overline{L_x} = \mathrm{i}\omega\overline{L_+} \tag{4}$$

此即升算符 $\hat{L}_+$ 的平均值满足的微分方程。对上式积分，得到

$$\overline{L_+(t)} = A\exp(\mathrm{i}\omega t) \tag{5}$$

于是有

$$\overline{L_x(t)} + \mathrm{i}\,\overline{L_y(t)} = A[\cos(\omega t) + \mathrm{i}\sin(\omega t)] \tag{6}$$

比较等式两边可知

$$\overline{L_x(t)} = A\cos(\omega t) \tag{7}$$

$$\overline{L_y(t)} = A\sin(\omega t) \tag{8}$$

而由(3)式知

$$\overline{L_z(t)} = B \tag{9}$$

最后利用初始条件定出常数

$$A = c_1,\quad B = c_2 \tag{10}$$

将其代入(7)～(9)式，得到

$$\begin{aligned}\overline{L_x(t)} &= c_1\cos(\omega t)\\ \overline{L_y(t)} &= c_1\sin(\omega t)\\ \overline{L_z(t)} &= c_2\end{aligned} \tag{11}$$