南京航空航天大学
二〇〇九年硕士研究生入学考试试题

考试科目：高等代数

说　明：所有试题答案必须写在答题纸上，答案写在试卷上无效

一、设有四维向量

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\\2\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\3\\1\end{pmatrix},\ \alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\3\end{pmatrix},\ \beta=\begin{pmatrix}-a\\3\\3a\\-a\end{pmatrix},$$

1. 求$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩和一个极大线性无关组；（5 分）
2. 讨论当a取何值时，β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表出，并求其表达形式.（10 分）

二、已知三平面

$$\begin{aligned}&x-y+2z+a=0,\\&2x+3y-z-1=0,\\&x-6y+bz+10=0\end{aligned}$$

交于一条直线，

1. 求参数a,b的值；（8 分）
2. 求三平面的交线方程.（7 分）

三、设$R^{2\times2}$是实数域R上的全体 2 阶矩阵按照矩阵的加法和数乘运算形成的线性空间，令

$$V_1=\left\{\begin{pmatrix}a&a+b\\c&c\end{pmatrix}\Big|\,a,b,c\in R\right\},\quad V_2=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}\Big|\,a,b,c\in R\right\},$$

则V_1和V_2是$R^{2\times2}$的两个子空间，

1. 求V_1的维数和一组基；（8 分）
2. 证明$\dim(V_1\cap V_2)=2$；（8 分）
3. 证明V_1与V_2同构.（4 分）

四、设 $R[x]_4$ 是次数小于 4 的全体实系数多项式（包括零多项式）所形成的线性空间，在 $R[x]_4$ 中定义线性变换 σ 为

$$\sigma(f(x)) = f''(x), \quad \forall f(x) \in R[x]_4,$$

1. 求 σ 在基 $1, x, x^2, x^3$ 下的矩阵；（8 分）
2. 求 σ 的值域和核；（10 分）
3. 求 σ 的特征值，并且证明 σ 在 $R[x]_4$ 的任意一组基下的矩阵都不可能是对角矩阵．（7 分）

五、设 B, C 是复数域上的两个方阵，分块矩阵 $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$，证明：

1. A 可逆的充分必要条件是 B, C 都可逆；（8 分）
2. A 可对角化的充分必要条件是 B, C 都可对角化．（12 分）

六、设有实二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ = (ax_1 + bx_2 + \cdots + bx_n)^2 + (bx_1 + ax_2 + \cdots + bx_n)^2 + \cdots + (bx_1 + bx_2 + \cdots + ax_n)^2,$$

其中 a, b 是常数，记 $P = \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$，

1. 证明 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的矩阵为 P^2；（5 分）
2. 证明 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 正定的充分必要条件是 $[a+(n-1)b](a-b) \neq 0$；（10 分）
3. 当 $a = 0, b = 1, n = 4$ 时，用正交变换法将 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 化为标准形．（10 分）

七、设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是两个多项式，证明 $f(x) \mid g(x)$ 的充分必要条件是 $f^2(x) \mid g^2(x)$．（15 分）

八、设 A, B 都是 n 阶矩阵，A 有 n 个相异的特征值，且 $AB = BA$，证明：

1. A 的特征向量都是 B 的特征向量；（5 分）
2. 存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 都是对角矩阵；（5 分）
3. 存在 n 阶矩阵 S，使得 $B = S^3$．（5 分）