南京航空航天大学
二〇一〇年硕士研究生入学考试试题

考试科目：高等代数

说　　明：所有试题答案必须写在答题纸上，答案写在试卷上无效

一、(20 分) 设 V_1 是方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

的解空间，V_2 是由向量组

$$\beta_1 = (1, 1, 0, 1)^T,\ \beta_2 = (4, 1, 3, 1)^T$$

生成的子空间，求 $V_1 + V_2$ 和 $V_1 \cap V_2$ 的维数和基，这里 α^T 表示向量 α 的转置，以下各题相同.

二、(20 分) 设 R^4 是 4 维实向量空间，$V = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in R^4 \mid x_1 + x_2 = 0\}$ 是 R^4 的一个子空间，在 V 中取向量

$$e = (1, 1, 1, -1)^T,$$

并定义线性变换:

$$\sigma(x) = x - \frac{1}{2}(e^T x)e, \quad \forall x \in V.$$

1. 求 V 的维数和一组标准正交基;
2. 求 σ 在题 1 所取基下的矩阵;
3. 证明 σ 是 V 的正交变换.

三、(20 分) 已知 $\alpha = (2, 1, 1)^T$ 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & x \\ y & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量.

1. 求参数 x 和 y 的值;
2. 求 A 的 Jordan 标准形 J;
3. 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = J$.

四、（20 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2tx_2x_3$ 经正交变换 $X=TY$ 化为标准形 $f=2y_1^2+y_2^2+5y_3^2$，这里 $t>0$ 是参数，$X=(x_1,x_2,x_3)^T$，$Y=(y_1,y_2,y_3)^T$.

1. 求参数 t 和正交矩阵 T；
2. 证明在条件 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 下，$f(x_1,x_2,x_3)$ 的最大值是 5.

五、（15 分）设 $f(x), g(x), d(x)$ 和 $h(x)$ 是数域 F 上的四个多项式，且

$$(x+a)f(x)+(x+b)g(x)=d(x)h(x),$$

$$(x-a)f(x)+(x-b)g(x)=d(x)h(x),$$

其中 a, b 是 F 中的两个不同的数, 证明: 如果 $(x, d(x))=1$, 则 $d(x)$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公因式.

六、（20 分）设 A 是 n 阶非零矩阵, 证明:

1. A 的秩为 r 的充分必要条件是存在 $n\times r$ 列满秩的矩阵 B 和 $r\times n$ 行满秩的矩阵 C，使得 $A=BC$；
2. 若 A 的秩为 1, 则存在常数 c, 使得 $A^2=cA$, 并且 A 可对角化的充分必要条件是 $c\neq 0$.

七、（20 分）设 n 阶实对称矩阵 A 有如下分块:

$$A=\begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{pmatrix},$$

其中 A_{n-1} 是 A 的 $n-1$ 阶顺序主子矩阵, 证明:

1. A 正定的充分必要条件是 A_{n-1} 正定且 $a_{nn}-\alpha^T A_{n-1}^{-1}\alpha>0$;
2. 如果 A 正定, 则 $|A|\le a_{nn}|A_{n-1}|$.

八、（15 分）设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是 $m\times n$ 矩阵 A 的行向量组, $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 是 $s\times n$ 矩阵 B 的行向量组, $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，证明:

1. 如果 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 是方程组 $AX=0$ 的基础解系，则方程组 $BX=0$ 的任一解可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表出;
2. 方程组 $AX=0$ 与方程组 $BX=0$ 同解的充分必要条件是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 等价.