南京航空航天大学

二〇一〇年硕士研究生入学考试试题

考试科目：数学分析

说　　明：所有试题答案必须写在答题纸上，答案写在试卷上无效

1.（10 分）求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\frac{4}{3}}(3^{\frac{1}{x}}-1)}{x^{\frac{1}{3}}-1}$.

2.（12 分）设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有定义，在点 $x=1$ 处连续，且对任何 $x>0$，有 $f(x)=f(x^2)$，证明 $f(x)$ 为常值函数。

3.（13 分）设函数 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 内连续，且 $f(a+0)=f(b-0)=-\infty$，证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内必能取到最大值。

4.（14 分）设 $f(x)=x\arctan x$，讨论 $f(x)$ 的单调性、凸性，并求 $f(x)$ 的极值与渐近线。

5.（13 分）证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}dx\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{1+x^2}dx$.

6.（13 分）证明反常积分 $\int_0^1\dfrac{1}{x^\alpha}\sin\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 条件收敛，其中 $1\le\alpha<2$.

7.（12 分）讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^{\ln n}}$ 的敛散性。

8.（12 分）设 a 为正常数，证明 函数 $u(x,t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$ 在上半平面 $R_+^2=\{(x,t)\in R^2\mid t>0\}$ 上满足热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0.$$

9.（12 分）设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{x(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

写出 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的 4 阶 Taylor 多项式，并求 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$，$\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0)$.

10.（13 分）计算积分 $\int_L (xy+yz+zx)ds$，

其中 L 是球面与平面的交线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x+y+z=0. \end{cases}$

11.（13 分）计算积分 $\iint_\Sigma (x-y+z)dydz+(y-z+x)dzdx+(z-x+y)dxdy$，

其中 Σ 为曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ 的外表面。

12.（13 分）设 $S_n(x)=n(x^n-x^{2n})$，$x\in[0,1]$，

（1）求函数序列 $\{S_n(x)\}$ 的极限函数；

（2）证明 $\{S_n(x)\}$ 不一致收敛；

（3）验证极限运算与积分运算不能交换，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)dx \neq \int_0^1 \left(\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)\right)dx$.