南京航空航天大学

2011 年硕士研究生入学考试初试试题（ A 卷 ）

科目代码: 814

科目名称: 高等代数

满分: 150 分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一、(20 分)设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & a & 6 \\ -2 & b & -5 \end{pmatrix}$ 可逆，$\alpha=(-2,1,1)^T$ 是 A 的伴随矩阵 A^* 的特征向量，特征值是 λ（这里"T"表示转置，以下各题相同）.

1．求参数 a,b 和特征值 λ；

2．问 A 能否相似于对角矩阵？如能，求出 A 的相似标准形；如不能，求出 A 的 Jordan 标准形.

二、(20 分)设 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2), V_2=L(\beta_1,\beta_2)$ 是 4 维实向量空间 R^4 的两个子空间，其中

$$\alpha_1=(1,0,1,0)^T,\quad \alpha_2=(-1,0,0,1)^T;\quad \beta_1=(1,1,0,1)^T,\quad \beta_2=(4,1,4,1)^T.$$

1．求一个 2×4 矩阵 A，使得 V_1 是方程组 $AX=0$ 的解空间，其中 $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$；

2．在 R^4 中求出满足条件 $\gamma\notin V_1$ 且 $\gamma\notin V_2$ 的全部向量 γ，并说明理由.

三、(20 分)设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2b(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$$

经过正交变换 $X=CY$ 化为二次型 $3y_2^2+3y_3^2$，求参数 a,b 的值及正交矩阵 C .

四、(20 分)设有实系数线性方程组

$$(1)\quad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0 \end{cases}$$

和 n 维实向量 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T\neq0$．记 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^T$ $(i=1,2,\cdots,s)$，证明：

1．如果 β 是方程组（1）的解向量，则 β 不可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出；

2．如果方程组（1）的解全是方程 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$ 的解，则 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出.

五、(15 分) 设 A 是 n 阶可逆矩阵，α 和 β 是两个 n 维列向量，证明：

1．$A+\alpha\beta^T$ 的秩不小于 $n-1$；

2．$A+\alpha\beta^T$ 可逆的充分必要条件是 $\beta^T A^{-1}\alpha \neq -1$．

六、(20 分) 设 $\mathbf{A}$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的线性变换，$\mathbf{A}$ 满足条件 $\mathbf{A}^{k-1}\neq 0, \mathbf{A}^k=0$，其中 $k\geq 2$ 是正整数，证明：

1．$\mathbf{A}$ 在 V 的任何一组基下的矩阵不可能是对角矩阵；

2．如果 $\mathbf{A}$ 的秩是 r，则 $k\leq r+1$；

3．如果 $k=n$，则 $\mathbf{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是 $\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$．

七、(20 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 n 个线性无关的 n 维实列向量，矩阵

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_1{}^T\alpha_1 & \alpha_1{}^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1{}^T\alpha_n \\ \alpha_2{}^T\alpha_1 & \alpha_2{}^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2{}^T\alpha_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_n{}^T\alpha_1 & \alpha_n{}^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n{}^T\alpha_n \end{pmatrix},$$

证明：

1．A 是正定矩阵；

2．$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\begin{vmatrix} A & X \\ X^T & 0 \end{vmatrix}$ 是负定二次型，其中 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$；

3．存在可逆的 n 阶实对称矩阵 S，使得 $A=S^2$．

八、(15 分) 设 $f(x)$ 是首项系数为１的 n 次整系数多项式，证明：如果有两两不相等的整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，使得

$$f(a_i)=-1,\quad i=1, 2, \cdots, n,$$

则 $f(x)$ 在有理数域上不可约．